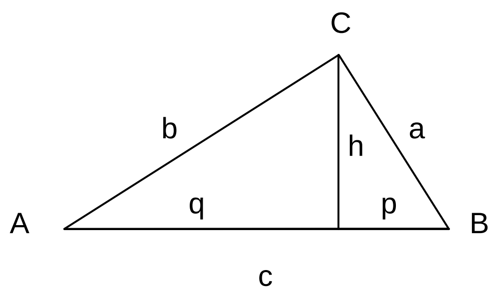
Erweiterung der Euklidischen Flächensätze auf das allgemeine Dreieck nebst Anwendung zur Volumenbestimmung des allgemeinen Tetraeders.

Arno Fehringer Juni 2007

In dieser Abhandlung sollen Betrachtungen, wie sie am rechtwinkligen Dreieck durchgeführt werden können um etwa die Gleichungen für den Höhensatz oder die Kathetensätze von **Euklid** zu erhalten, auf allgemeine Dreiecke erweitert werden.
Die Bedeutung und Anwendung dieser Gleichungen ist vielfach. Zum Beispiel kann durch sie die Äquivalenz der Euklidischen Flächensätze einschließlich des Satzes von Pythagoras für das rechtwinkligre Dreieck einfach nachgewiesen werden. Des Weiteren können sie verwendet werden, um das Volumen eines unregelmäßigen Tetraeders in Abhängigkeit von seinen 6 Kanten zu berechnen. Als Konsequenz kann das Volumen diverser konvexer Deltaeder (z. B. 10-Deltaeder) bestimmt werden.

Zur Verdeutlichung beginnen wir zunächst mit dem rechwinkligen Dreieck ΔABC mit den kanonischen Bezeichnungen a,b,c für die beiden Katheten bzw. die Hypotenuse sowie h,p,q für die Höhe auf die Hypotenuse und den entsprechenden Hypotenusenabschnitten.

Herleitung der Kathetensätze:



Die Höhe h zerlegt das Dreieck ΔABC in zwei rechtwinklige Dreiecke. Nach dem Satz des Pythagoras gelten folgende Gleichungen:

(1) $a^2 + b^2 = c^2$

(2) $p^2 + h^2 = a^2$

(3) $q^2 + h^2 = b^2$

(4) $p + q = c$

Formt man (2) nach h^2 um und setzt den Term in (3) ein, erhält man

(3') $q^2 + a^2 - p^2 = b^2$

Setzt man (3') und (4) in (1) ein, erhält man folgende Gleichungskette:

$$a^2 + q^2 + a^2 - p^2 = (p+q)^2$$

$$2a^2 + q^2 - p^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

$$2a^2 = 2p^2 + 2pq$$

$$a^2 = p^2 + pq$$

$$a^2 = p(p+q)$$

$$\boxed{\mathbf{a^2 = pc}}$$

Aus „Symmetriegründen“ muss eine entsprechende Gleichung für die andere Kathete gelten:

$$\boxed{\mathbf{b^2 = qc}}$$

Die beiden letzten Gleichungen sind die bekannten Darstellungen der **Kathethensätze** .

q.e.f

Herleitung des Höhensatzes:

Setzt man die Gleichungen (2) – (4) in (1) ein, folgt:

$$p^2 + h^2 + q^2 + h^2 = (p+q)^2$$

$$p^2 + h^2 + q^2 + h^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

$$p^2 + 2h^2 + q^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

$$2h^2 = 2pq$$

$$\boxed{\mathbf{h^2 = pq}}$$

q.e.f

Um p, q, h in Abhängigkeit von den Dreieckseiten a,b,c berechnen zu können, kann man die Gleichungen wie folgt umformen:

$$p = a^2/c$$

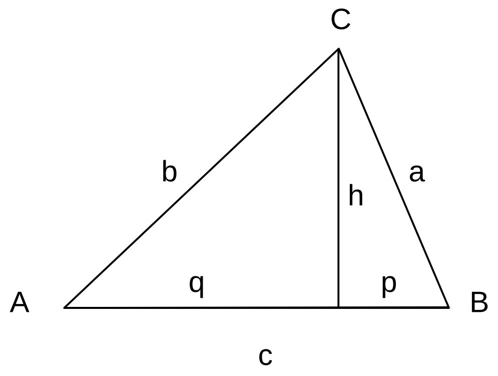
$$q = b^2/c$$

$$h = ab / c$$

$$h = sqrt(pq)$$

Betrachtungen am allgemeinen Dreieck:

1. Fall: ΔABC ist spitzwinklig



Jetzt gelten nur noch die Gleichungen (2) - (4):

(2) $p^2 + h^2 = a^2$

(3) $q^2 + h^2 = b^2$

(4) $p + q = c$

Formt man (2) nach h^2 um und setzt den Term in (3) ein, erhält man

(3') $q^2 + a^2 - p^2 = b^2$

Formt man (4) nach q um und setzt den Term in (3') ein, erhält man

$$(c-p)^2 + a^2 - p^2 = b^2$$

$$c^2 - 2cp + p^2 + a^2 - p^2 = b^2$$

$$c^2 - 2cp + a^2 = b^2$$

$$a^2 + c^2 - b^2 = 2pc$$

$$\mathbf{(a^2 + c^2 - b^2)/2 = pc}$$

$$\mathbf{p = (a^2 + c^2 - b^2)/2c}$$

Aus „Symmetriegründen“ muss eine entsprechende Gleichung für q und b,c,a gelten:

$$\mathbf{(b^2 + c^2 - a^2)/2 = qc}$$

$$\mathbf{q = (b^2 + c^2 - a^2)/2c}$$

Um für h Abhängigkeit von p,q zu bekommen, kann man (2) und (3) addieren und erhält:

$$p^2 + q^2 + 2h^2 = a^2 + b^2$$

$$2h^2 = a^2 + b^2 – (p^2 + q^2)$$

$$2h^2 = a^2 + b^2 – (p^2 + q^2) – 2pq + 2pq$$

$$2h^2 = a^2 + b^2 – (p + q)^2 + 2pq$$

$$2h^2 = a^2 + b^2 – c^2 + 2pq$$

$$\mathbf{h^2 = (a^2 + b^2 – c^2)/2 + pq}$$

$$\mathbf{h = sqrt ((a^2 + b^2 – c^2)/2 + pq)}$$

Setzt man den Term für p in (2) ein, erhält man h in Abhängigkeit von a,b,c:

$$[\ (a^2 + c^2 - b^2)/2c\ ]^2 + h^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - [\ (a^2 + c^2 - b^2)/2c\ ]^2$$

$$h^2 = a^2 - [\ a^2 + c^2 - b^2\ ]^2 / 4c^2$$

$$h^2 = (\ 4a^2c^2 - [\ a^2 + c^2 - b^2\ ]^2) / 4c^2$$

$$h^2 = (\ 4a^2c^2 - [\ a^4 + c^4 + b^4 + 2a^2c^2 - 2a^2b^2 -2c^2b^2]) / 4c^2$$

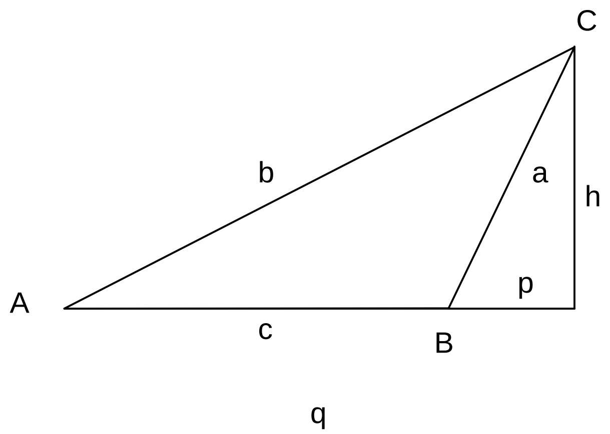
$$h^2 = (\ 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) / 4c^2$$

$$\mathbf{h = sqrt(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) / 2c}$$

q.e.f

.

2. Fall: ΔABC ist stumpfwinklig, $\beta>90°$



Es gelten die Gleichungen (2) - (4):

(2) $p^2 + h^2 = a^2$

(3) $q^2 + h^2 = b^2$

(4) $p + q = c$, wobei jetzt $p < 0$ ist

Formt man (2) nach h^2 um und setzt den Term in (3) ein, erhält man

(3’) $q^2 + a^2 - p^2 = b^2$

Setzt man (4) in (3’) ein, erhält man

$(c-p)^2 + a^2 - p^2 = b^2$

$c^2 - 2cp + p^2 + a^2 - p^2 = b^2$

$c^2 - 2cp + a^2 = b^2$

$a^2 + c^2 - b^2 = 2pc$

$\mathbf{p = (a^2 + c^2 - b^2)/2c}$

Formt man (3) nach h^2 und (4) nach p um und setzt die Terme in (2) ein erhält man:

$(q-c)^2 + b^2 - q^2 = a^2$

$q^2 - 2qc + c^2 + b^2 - q^2 = a^2$

$-2qc + c^2 + b^2 = a^2$

$\mathbf{b^2 + c^2 - a^2 = 2qc}$

$\mathbf{q = (b^2 + c^2 - a^2)/2c}$

Um für h Abhängigkeit von p,q zu bekommen, kann man (2) und (3) addieren und erhält:

$p^2 + q^2 + 2h^2 = a^2 + b^2$

$2h^2 = a^2 + b^2 - (p^2 + q^2)$

$2h^2 = a^2 + b^2 - (p^2 + q^2) - 2pq + 2pq$

$2h^2 = a^2 + b^2 - (p + q)^2 + 2pq$

$2h^2 = a^2 + b^2 - c^2 + 2pq$

$\mathbf{h^2 = (a^2 + b^2 - c^2)/2 + pq}$

$\mathbf{h = sqrt((a^2 + b^2 - c^2)/2 + pq)}$

Setzt man den Term für p in (2) ein, erhält man h in Abhängigkeit von a,b,c:

$[\ -(a^2 + c^2 - b^2)/2c\ ]^2 + h^2 = a^2$

$h^2 = a^2 - [\ (a^2 + c^2 - b^2)/2c\ ]^2$

$h^2 = a^2 - [\ a^2 + c^2 - b^2\ ]^2\ / 4c^2$

$h^2 = (\ 4a^2c^2 - [\ a^2 + c^2 - b^2\ ]^2\ )\ / 4c^2$

$$h^2 = (4a^2c^2 - [a^4 + c^4 + b^4 + 2a^2c^2 - 2a^2b^2 -2c^2b^2]) / 4c^2$$

$$h^2 = (2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) / 4c^2$$

$$\mathbf{h = sqrt(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) / 2c}$$

q.e.f

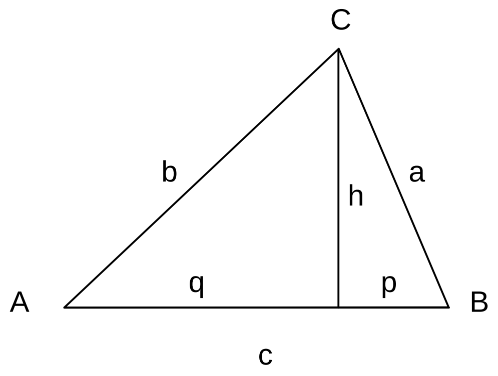
Die erhaltenen Gleichungen für p,q,h des allgemeinen Dreiecks heißen:

$$p = (a^2 + c^2 - b^2)/2c$$

$$q = (b^2 + c^2 - a^2)/2c$$

$$h = sqrt(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) / 2c$$

$$h = sqrt((a^2 + b^2 - c^2)/2 + pq)$$



Zusatz:
Der Flächeninhalt A =ch/2, also :

$$A = sqrt(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) / 4$$

Vier Anwendungen:

1. Äquivalenz der Euklidischen Flächensätze:

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a,b und der Hypotenuse c, der Höhe h auf c und den Hypotenusenabschnitten p,q, sind folgende Gleichungen äquivalent:

(P) $a^2 + b^2 = c^2$

(K) $a^2 = pc$, $b^2 = qc$

(H) $h^2 = pq$

Bew.:

Es genügt zu zeigen: (K) ⬄ (P) und (H) ⬄ (P) :

$a^2 = pc$ $b^2 = qc$

⬄ $a^2 = (a^2 + c^2 - b^2)/2c \cdot c$, $b^2 = (b^2 + c^2 - a^2)/2c \cdot c$

⬄ $a^2 = (a^2 + c^2 - b^2)/2$, $b^2 = (b^2 + c^2 - a^2)/2$

⬄ $2a^2 = a^2 + c^2 - b^2$, $2b^2 = b^2 + c^2 - a^2$

⬄ $a^2 + a^2 = c^2$, $a^2 + b^2 = c^2$

$h^2 = pq$

⬄ $(\mathrm{sqrt}((a^2 + b^2 - c^2)/2 + pq))^2 = pq$

⬄ $(a^2 + b^2 - c^2)/2 + pq = pq$

⬄ $(a^2 + b^2 - c^2)/2 = 0$

⬄ $a^2 + b^2 - c^2 = 0$

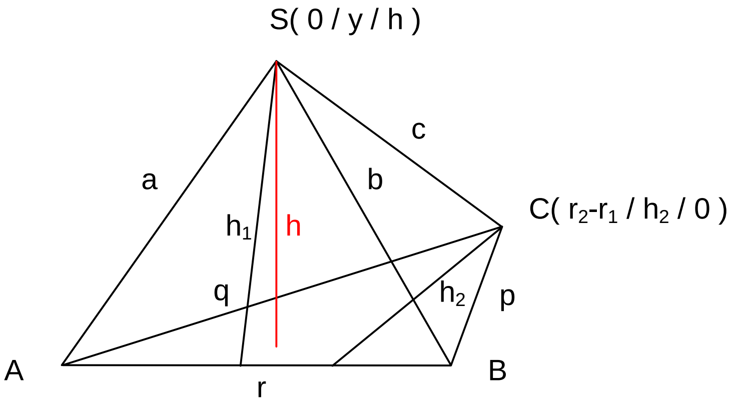
⬄ $a^2 + b^2 = c^2$

q.e.d.

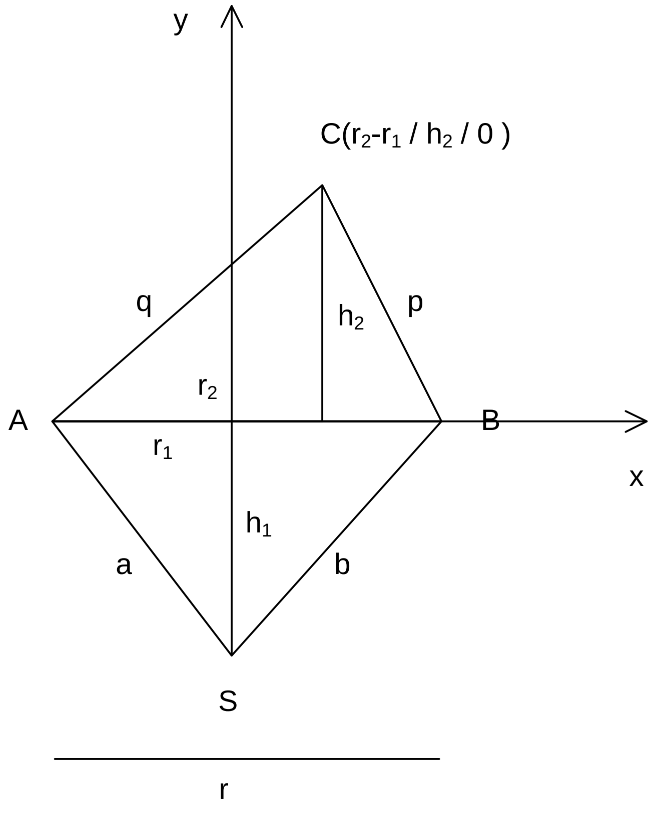
Zusatz:
Da die Rechtwinkligkeit eines Dreiecks aquivalent zu (P) ist, kann man sagen:
Ein Dreieck ist genau dann rechtwinklig, wenn einer der Gleichungen (P) , (K), (H) gilt.

2. Volumen des unregelmäßigen Tetraeders in Abhängigkeit von den Kanten:

Das Tetraeder habe die Kanten p,q,r in der Grundfläche ∆ABC und von der Spitze S zur Grundfläche die Kanten a,b,c .
Deshalb gibt es drei Paare gegenüberliegender Kanten: a – p , b – q, c – r



Man denkt sich zunächst die Vorderfläche des Tetraeders in die Ebene der Grundfläche geklappt und führt ein geeignetes Koordinatensystem ein:



Die Längen von r_1, r_2, h_1, h_2 lassen sich mit den **Fehringerschen Gleichungen** in Abhängigkeit von den Kanten a,b,c,p,q,r berechnen:

$r_1 = (a^2 + r^2 - b^2)/2r$

$r_2 = (q^2 + r^2 - p^2)/2r$

$$h_1^2 = (2a^2b^2 + 2a^2r^2 + 2b^2r^2 - a^4 - b^4 - r^4) / 4r^2$$

$$h_2^2 = (2p^2q^2 + 2p^2r^2 + 2q^2r^2 - p^4 - q^4 - r^4) / 4r^2$$

Berechnung der Koordinaten von S(0 / y / h):

Wegen $|S0|^2 = h_1^2$ folgt Gleichung (1):

$$(0-0)^2 + (y-0)^2 + (h-0)^2 = h_1^2$$

(1) $$y^2 + h^2 = h_1^2$$

Das Dreieck ΔABS wird nun um die x-Achse so lange gedreht bis $|SC|^2 = c^2$ ist. Mit S(0 / y / h) und C($r_2 - r_1$ / h_2 / 0) erhält man Gleichung (2):

$$(0 – (r_2 - r_1))^2 + (y - h_2)^2 + (h - 0)^2 = c^2$$

$$(r_2 - r_1)^2 + (y - h_2)^2 + h^2 = c^2$$

(2) $$(y - h_2)^2 + h^2 = c^2 - (r_2 - r_1)^2$$

Nun formt man (1) nach h^2 um und setzt den Term in (2) ein :

$$(y - h_2)^2 + h_1^2 - y^2 = c^2 - (r_2 - r_1)^2$$

$$y^2 - 2yh_2 + h_2^2 + h_1^2 - y^2 = c^2 - (r_2 - r_1)^2$$

$$-2yh_2 + h_2^2 + h_1^2 = c^2 - (r_2 - r_1)^2$$

$$y = (h_1^2 + h_2^2 + (r_2 - r_1)^2r- c^2) / 2h_2$$

$$y^2 = (h_1^2 + h_2^2 + (r_2 - r_1)^2 - c^2)^2 / 4h_2^2$$

Den Term für y^2 setzt man in (1) ein und formt nach h^2 um :

$$h^2 = h_1^2 - (h_1^2 + h_2^2 + (r_2 - r_1)^2 - c^2)^2 / 4h_2^2$$

$$h^2 = (4h_1^2h_2^2 - (h_1^2 + h_2^2 + (r_2 - r_1)^2 - c^2)^2) / 4h_2^2$$

Betrachtet man jetzt das Quadrat des Volumens $V^2 = 1/9 \cdot G^2 \cdot h^2$ mit

$G^2 = 1/4 \cdot r^2 h_2^2$ und

$h^2 = (4h_1^2h_2^2 - (h_1^2 + h_2^2 + (r_2 - r_1)^2 - c^2)^2) / 4h_2^2$ so folgt:

$V^2 = 1/9 \cdot G^2 \cdot h^2$

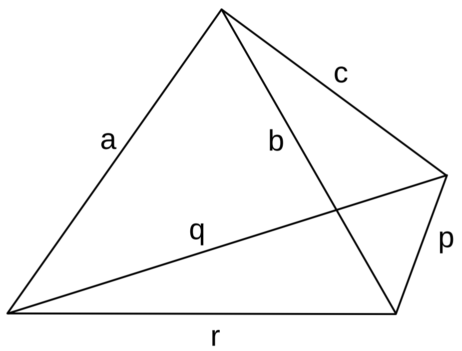
$V^2 = 1/9 \cdot 1/4 \cdot r^2h_2^2 \cdot (4h_1^2h_2^2 - (h_1^2 + h_2^2 + (r_2 - r_1)^2 - c^2)^2) / 4h_2^2$

$V^2 = 1/144 \cdot r^2 \cdot (4h_1^2h_2^2 - (h_1^2 + h_2^2 + (r_2 - r_1)^2 - c^2)^2)$

Durch Einsetzen der Terme für r_1,r_2,h_1,h_2 und vereinfachen (was wegen der hohen Anzahl der Terme nicht ganz einfach ist) kann man folgende Form erhalten:

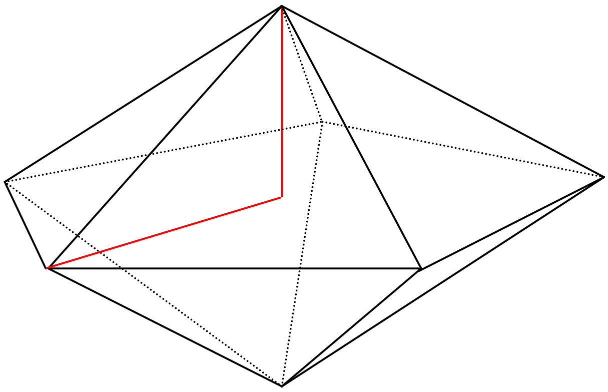
Volumenformel für das unregelmäßige Tetraeder :

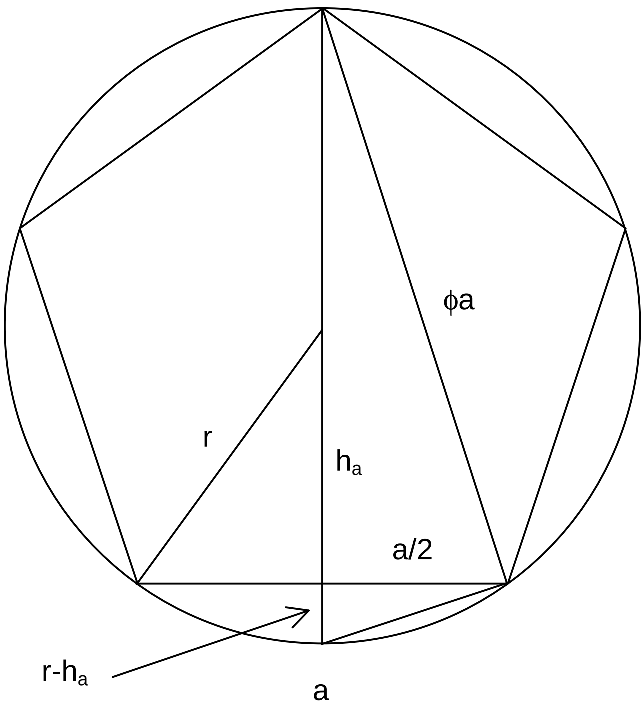
$$V^2 = 1/144 \cdot \left(\begin{array}{l} a^2b^2(p^2 + q^2 - r^2) \\ + \\ a^2c^2(p^2 - q^2 + r^2) \\ + \\ b^2c^2(- p^2 + q^2 + r^2) \\ \\ + \\ a^2p^2(q^2 + r^2) \\ + \\ b^2q^2(p^2 + r^2) \\ + \\ c^2r^2(p^2 + q^2) \\ \\ - \\ a^2p^2(a^2 + p^2) \\ - \\ b^2q^2(b^2 + q^2) \\ - \\ c^2r^2(c^2 + r^2) \\ \\ - \\ p^2q^2r^2 \end{array} \right)$$



3. Volumen des konvexen 10-Deltaeders

Länge der Kanten: a





(1) $(a/2)^2 + ha^2 = r^2$

(2) $(\phi a)^2 = (r + ha)2r$ mit $\phi = (\text{sqrt}(5)+1)/2$, $\phi^2 = \phi+1$

Bestimmung von r:

(2) nach h_a in (1)

$(a/2)^2 + ((\phi^2 a^2 - 2r^2)^2 / 4r^2 = r^2$

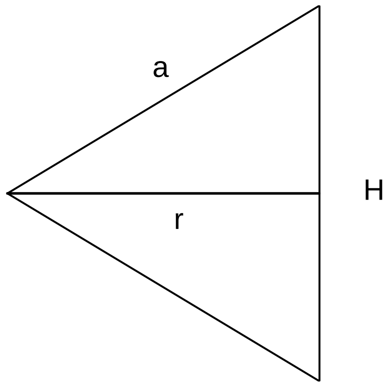
$a^2 r^2 + \phi^4 a^4 - 4\phi^2 a^2 r^2 + 4r^4 = 4r^4$

$4\phi^2 a^2 r^2 - a^2 r^2 = \phi^4 a^4$

$(4\phi^2 - 1) a^2 r^2 = \phi^4 a^4$

$(4\phi^2 - 1)\, r^2 = \phi^4 a^2$

$r^2 = (3\phi+2)/(4\phi+3) \cdot a^2$ (wegen $\phi^2 = \phi+1$)



Berechnung der Körperhöhe:

$H = 2\ \mathrm{sqrt}\ (a^2 - r^2)$

$H = 2\ \mathrm{sqrt}\ (a^2 - (3\phi+2)/(4\phi+3) \cdot a^2)$

$H = 2\ \mathrm{sqrt}\ ((\phi+1)/(4\phi+3)) \cdot a$

Berechnung des Volumens:
Der Körper setzt sich zusammen aus 5 kongruenten unregelmäßigen Tetraedern mit 5 Kantenlängen a und einer Kante H. Die Tetraeder haben das Volumen V_T, was mit der **Volumenformel** berechnet werden kann:

$$V = 5V_T$$

$V_T^2 = 1/144 \cdot (3H^2 a^4 - H^4 a^2)$

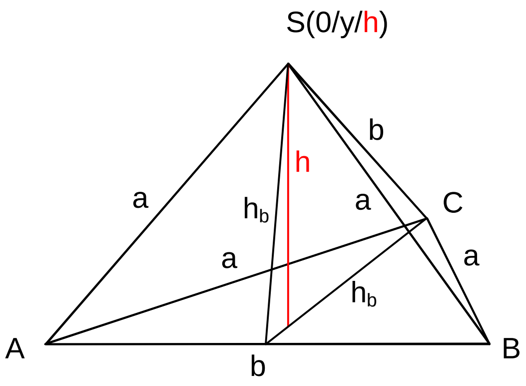
$V_T^2 = 1/144 \cdot ((84\phi+52)/(4\phi+3)^2)\, a^6$

$V_T = 1/6 \cdot \mathrm{sqrt}\ (21\phi+13)/(4\phi+3)^2\, a^3$

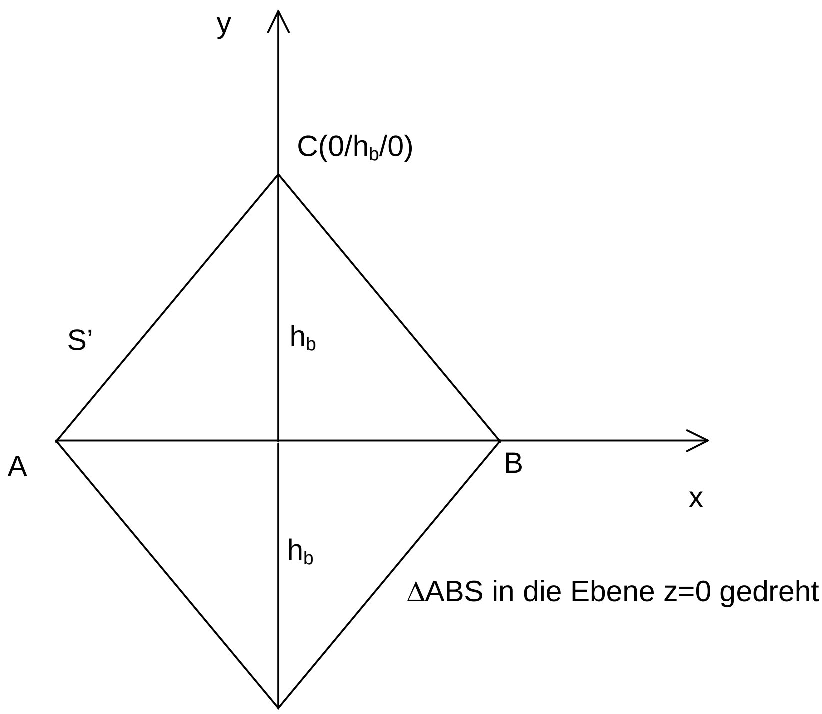
$$V = 5/6 \cdot \mathrm{sqrt}\ (21\phi+13)/(4\phi+3)^2\, a^3$$

4. Volumen eines speziellen unregelmäßigen Tetraeders:
4 Kanten haben die Länge a , 2 gegenüberliegende Kanten die Länge b

Das Volumen wird nach der bekannten Formel V = Gh/3 berechnet, wobei G,h Grundfläche und Höhe des Körpers sind. Um die Höhe h in Abhängigkeit von den Kanten zu bekommen werden zunächst die Koordinaten des Spitze S berechnet:



Zum besseren Verständnis denkt man sich zunächst nur die Grundfläche des Körpers und die Vorderfläche in der x-y-Ebene liegend gegebengegeben, so dass die Punkte A,B,C auf den Achsen liegen.



Berechnung von h_b :
Zur Berechnung von h_b in Abhängigkeit von a,b wird die **Fehringersche Gleichung** angewendet

$$h_b = sqrt(2a^2a^2 + 2a^2b^2 + 2a^2b^2 - a^4 - a^4 - b^4) / 2b$$

$$h_b = sqrt (4a^2b^2 - b^4) / 2b$$

$$h_b = sqrt\ b^2 (4a^2 - b^2) / 2b$$

$$h_b = b\ sqrt (4a^2 - b^2) / 2b$$

$$h_b = sqrt (4a^2 - b^2) / 2$$

Berechnung der Koordinaten y,h von S :
Das Dreieck $\cap$ABS wird nun um die x-Achse so lange gedreht bis $ISCI^2 = b^2$ ist. Das liefert die folgende Gleichung:

$$(0-0)^2 + (y-h_b)^2 + (h-0)^2 = b^2$$

(1) $$(y-h_b)^2 + h^2 = b^2$$

Eine zweite Gleichung ergibt sich aus $IS0I^2 = h_b^2$:

$$(0-0)^2 +(y-0)^2 + (h-0)^2 = h_b^2$$

(2) $$y^2 + h^2 = h_b^2$$

Formt man (2) nach h2 um und setzt den Term in (1) ein , erhält man :

$$(y-h_b)^2 + h_b^2 -y^2 = b^2$$

$$y^2 - 2yh_b + h_b^2 + h_b^2 - y^2 = b^2$$

$$- 2yh_b + 2h_b^2 = b^2$$

$$2yh_b = 2h_b^2 - b^2$$

$$y = (2h_b^2 - b^2)/2\ h_b$$

$$y = ((4a^2 - b^2)/2 - b^2) / sqrt (4a^2 - b^2)$$

$$y = (4a^2 - 3b^2) / 2\ sqrt (4a^2 - b^2)$$

$$y^2 = (4a^2 - 3b^2)^2 / 4 (4a^2 - b^2)$$

Den Term für y^2 und den Term für h_b setzt man in (2) ein und formt nach h um :

$$h^2 = h_b^2 - y^2$$

$$h^2 = (4a^2 - b^2)/4 - (4a^2 - 3b^2)^2 / 4 (4a^2 - b^2)$$

$$h^2 = ((4a^2 - b^2)^2 - (4a^2 - 3b^2)^2) / 4 (4a^2 - b^2)$$

$h^2 = (16a^4 - 8a^2b^2 + b^4 - 16a^4 + 24a^2b^2 - 9b^4) / 4 (4a^2 - b^2)$

$h^2 = (16a^2b^2 - 8b^4) / 4 (4a^2 - b^2)$

$h^2 = (4a^2b^2 - 2b^4) / (4a^2 - b^2)$

$h = sqrt ((4a^2b^2 - 2b^4) / (4a^2 - b^2))$

$h = b\ sqrt(2) \cdot sqrt (2a^2 – b^2) / sqrt (4a^2 - b^2)$

Berechnung der Grundfläche :

$G = sqrt (2a^2a^2 + 2a^2b^2 + 2a^2b^2 - a^4 - a^4 - b^4) / 4$

$G = b\ sqrt (4a^2 – b^2) / 4$

Berechnung des Volumens :

$V = Gh/3$

$V = b\ sqrt (4a^2 – b^2) / 4 \cdot b\ sqrt (2) \cdot sqrt (2a^2 – b^2) / sqrt (4a^2 - b^2)/3$

$V = b^2 sqrt (2) \cdot sqrt (2a^2 - b^2) / 12$

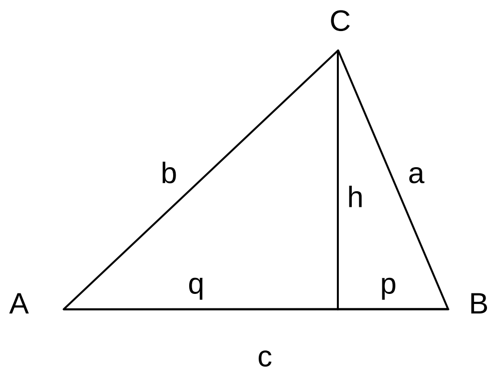
Gleichungen für p,q,h des allgemeinen Dreiecks:

$p = (a^2 + c^2 - b^2)/2c$

$q = (b^2 + c^2 - a^2)/2c$

$h = \mathrm{sqrt}(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) / 2c$

$h = \mathrm{sqrt}((a^2 + b^2 - c^2)/2 + pq)$



Zusatz:
Der Flächeninhalt A = ch/2 , also:

$A = \mathrm{sqrt}(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) / 4$

Volumenformel für das unregelmäßige Tetraeder :

$$V = 1/12 \cdot \mathrm{sqrt}\begin{pmatrix} a^2b^2(\ \ p^2 + q^2 - r^2\ ) \\ + \\ a^2c^2(\ \ p^2 - q^2 + r^2\ ) \\ + \\ b^2c^2(-p^2 + q^2 + r^2) \\ + \\ a^2p^2(q^2 + r^2) \\ + \\ b^2q^2(p^2 + r^2) \\ + \\ c^2r^2(p^2 + q^2) \\ - \\ a^2p^2(a^2 + p^2) \\ - \\ b^2q^2(b^2 + q^2) \\ - \\ c^2r^2(c^2 + r^2) \\ - \\ p^2q^2r^2 \end{pmatrix}$$