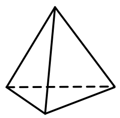
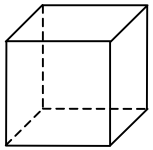
Platonische Körper

Für den Bau der folgendenden Polyeder (gr.: Vielflächner) kann man das Material „Polydron“ verwenden. Es besteht im wesentlichen aus Plastikteilen in Form von ebenen regelmäßigen Vielecken (Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, Sechsecke,...), welche sich zu ebenen oder räumlichen Gebilden zusammenfügen lassen.

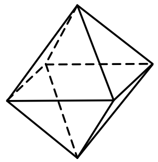
Seit dem Altertum sind die sogenannten Fünf Platonischen Körper bekannt. (Platon: griechischer Philosoph, 427-347 v. Chr.) . Der griechische Mathematiker **EUKLID** (um 300 v. Chr.) zeigte in Buch XIII seiner „ELEMENTE“, dass es nur diese fünf regelmäßigen Körper geben kann.



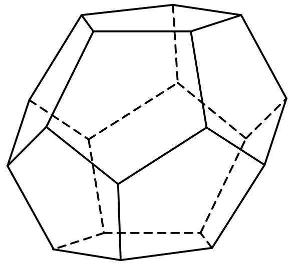
Tetraeder



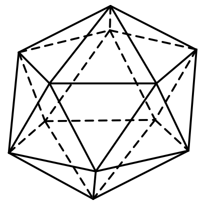
Hexaeder



Oktaeder

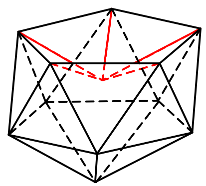


Dodekaeder



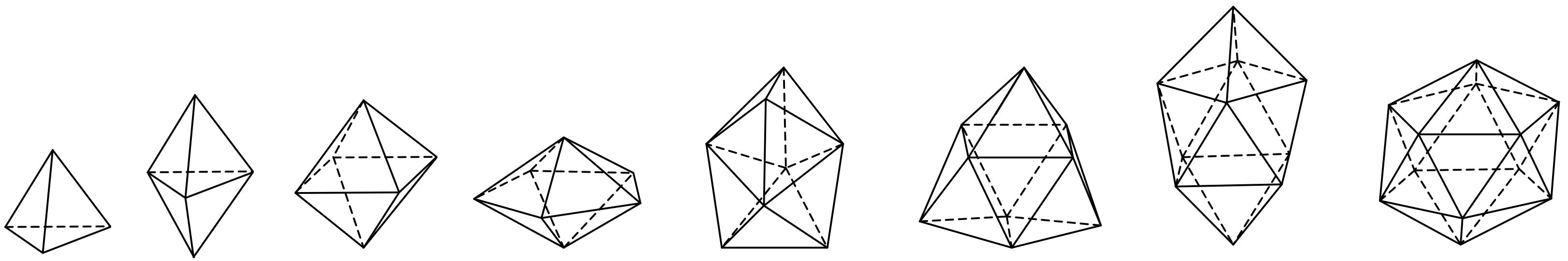
Ikosaeder

Die Namen gehen auf das Griechische zurück, und beziehen sich auf die jeweilige Flächenzahl. Das Tetraeder etwa bedeutet Vierflächner, da es durch vier Dreiecke begrenzt wird. Unter den Platonischen Körpern haben wir also jeweils einen 4-, 6-, 8-, 12- und 20-Flächner. Die Bezeichnung „regelmäßig“ bei einem Körper bedeutet, dass an jeder Ecke gleich viele kongruente Vielecke zusammenstoßen, (die Ecken also gleiche Zähligkeit aufweisen), und dass er konvex ist, also keine Einbuchtungen aufweist.
Zum Beispiel erfüllt der durch „Einstülpen“ des Ikosaeders entstandene Körper nicht die Bedingung der Regelmäßigkeit, weil er nicht konvex ist.



Konvexe Deltaeder

Interessant ist, dass es neben den Platonischen Körpern weitere, aus gleichseitigen Dreiecken aufgebaute konvexe Körper gibt, falls man auch unterschiedliche Zähligkeit der Ecken zulässt.
Konvexe Körper, deren Oberflächen ausschließlich aus gleichseitigen Dreiecken gebildet werden, deren Ecken 3-, 4-, oder 5-zählig sind, und bei denen zwei nebeneinanderliegende Dreiecke nicht in einer Ebene liegen, heißen Deltaeder. Ihre Benennung erfolgte nach dem griechischen Buchstaben Delta (Δ), der die Form eines Dreiecks besitzt.
Insgesamt gibt es acht konvexe Deltaeder.



Stellt man die wesentlichen Daten wie Zähligkeit, Ecken-, Kanten-, und Flächenzahl dar, ergibt sich folgende Tabelle:

3-zählige Eckensterne e_3	4-zählige Eckensterne e_4	5-zählige Eckensterne e_5	Ecken e	Kanten k	Flächen f	Name	Platonischer Körper
4	0	0	4	6	4	Tetraeder	ja
2	3	0	5	9	6	trigonale Dipyramide	
6	0	0	6	12	8	Oktaeder	ja
0	5	2	7	15	10	pentagonale Dipyramide	
0	4	4	8	18	12	erweiterte pentagonale Dipyramide	
0	3	6	9	21	14	Tripyramidales trigonales Prisma	
0	2	8	10	24	16	Dipyramidales tetragonales Antiprisma	
0	0	12	12	30	20	Ikosaeder	ja

Sucht man nach Strukturen oder Zusammenhängen in dieser Tabelle, fällt z. B. auf, dass nur gerade Flächenzahlen, nämlich 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 20 vorkommen. Die Flächenzahl 18 ist nicht dabei. Hierauf wird später noch eingegangen.

Der bedeutendste Zusammenhang liegt in der Tatsache, dass bei jedem Körper die Summe aus Ecken- und Flächenzahl die Kantenzahl um 2 übertrifft: $e + f = k + 2$

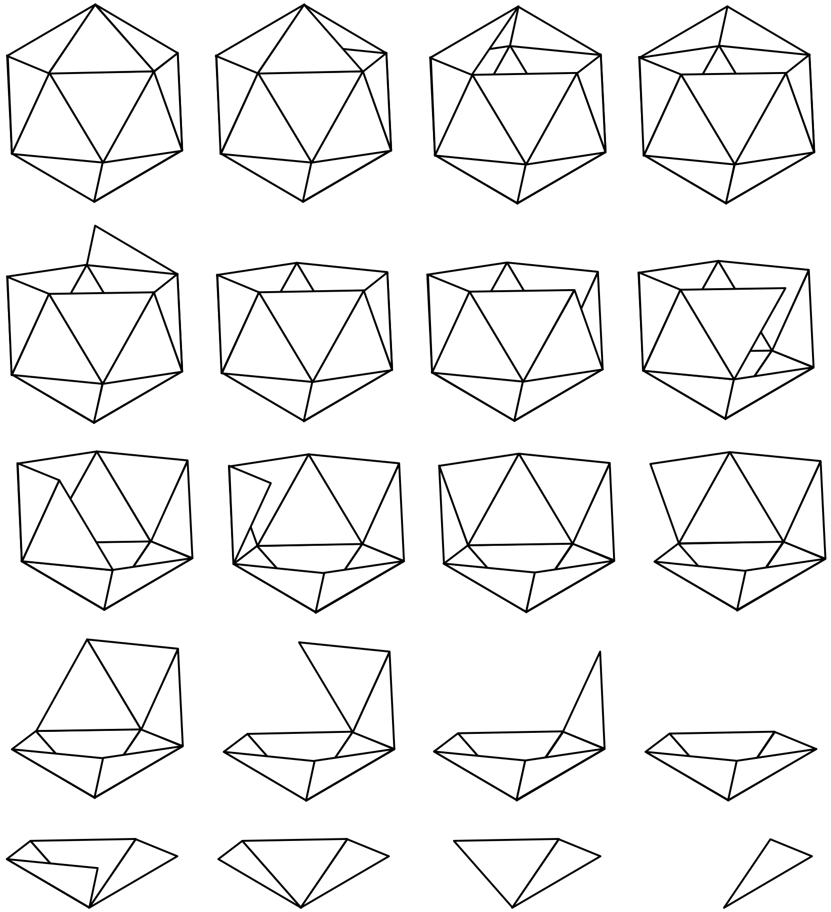
Dies ist die bekannte, auf den Schweizer Mathematiker **LEONARD EULER** (1707 - 1783) zurückgehende Polyederformel, die allerdings meist in der Form

$$e - k + f = 2$$

geschrieben wird.

Anschaulicher „Beweis“ der Eulerschen Polyederformel

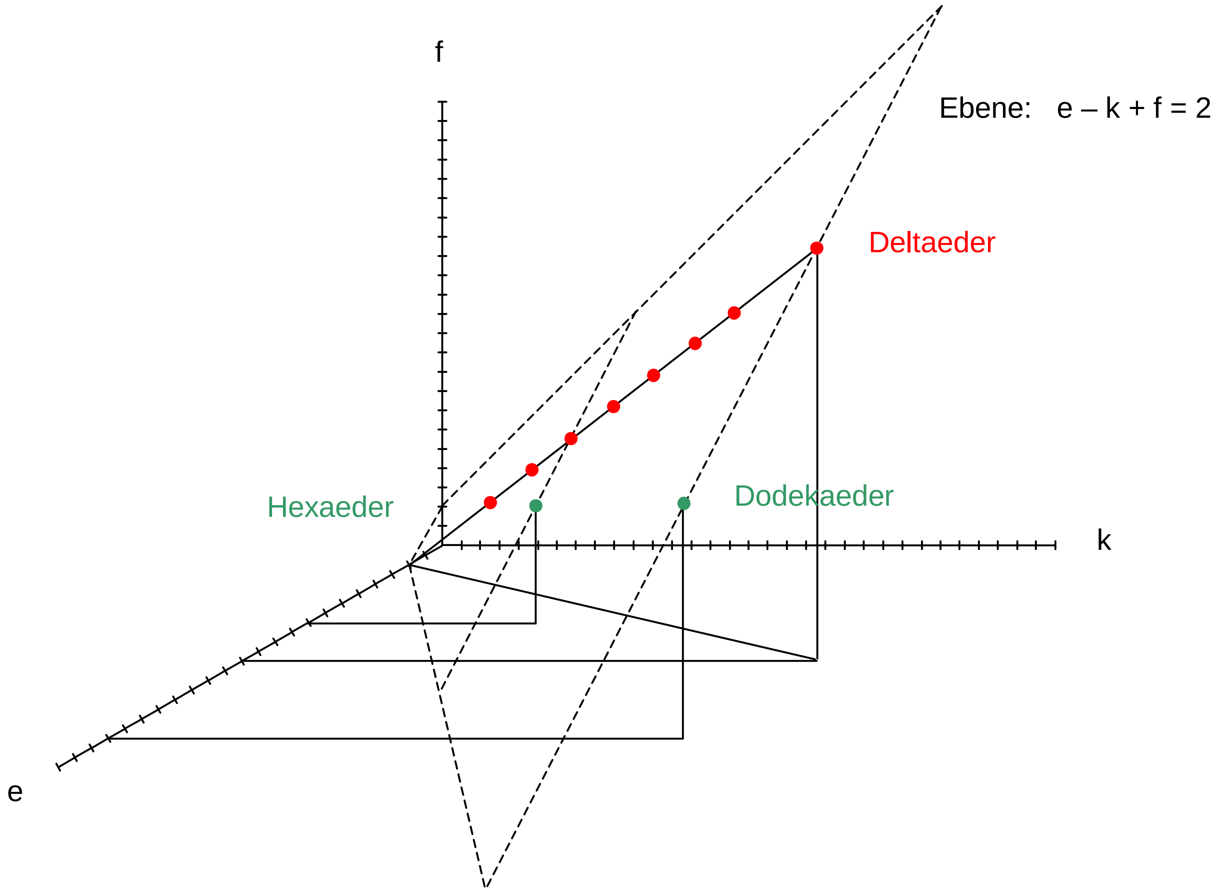
Von der Richtigkeit der Eulerschen Polyederformel kann man sich auf anschauliche Weise überzeugen: Baut man einen Deltaeder, z. B. einen Ikosaeder, schrittweise ab, und entfernt zunächst ein Dreieck, so erhält man ein vasen- oder schalenförmiges Gebilde. Da jetzt eine Fläche fehlt, gilt nur noch $e - k + f = 1$.
Fährt man mit dem Abbauen fort und achtet darauf, dass das zu entfernende Dreieck jeweils vom Rand des schalenförmigen Gebildes weggenommen wird, so stellt man fest, dass nach jedem Schritt immer noch $e - k + f = 1$ ist. Zuletzt bleibt von dem Körper ein Dreieck, also ein Gebilde mit drei Ecken, drei Kanten und einer Fläche, übrig, für welches die Gleichung $e - k + f = 1$ offenbar gültig ist. Deshalb sind auch die vorigen Gleichungen gültig , und es ist insbesonders $e - k + f = 2$.
Die obigen Überlegungen kann man selbstverständlich auf jedes konvexe Deltaeder, auf die Platonischen Körper und allgemein auf jedes konvexe Polyeder übertragen, womit der Beweis beendet wäre.



Arno Fehringer, Gymnasiallehrer für Mathematik und Physik, Wilhelm-Bläsig-Schule, Hegau-Jugendwerk, 78262 Gailingen, Kapellenstr. 31

Zur Heuristik der Polyederformel

Die Gleichung e - k + f = 2 entspricht einer Ebene im ekf-Raum, welche allerdings durch die Daten der Deltaeder allein nicht zwingend ist, da die konvexen Deltaeder im ekf-Raum 8 kolinearen Punkten entsprechen. Erst durch die Hinzunahme eines weiteren Körpers, z. B. des Hexaeders oder des Dodekaeder wäre die Ebene eindeutig festgelegt.



Warum es unter den konvexen Deltaedern keinen 18-Flächner gibt

Nehmen wir an, es gäbe einen derartigen Körper mit e Ecken, k Kanten und f=18 Flächen. Er sei so aufgebaut, dass er e_3 Ecken mit der Zähligkeit 3, e_4 Ecken mit der Zähligkeit 4 und e_5 Ecken mit der Zähligkeit 5 besitze.
Dann gelten folgende Gleichungen :

$$f = 18$$
$$e_3 + e_4 + e_5 = e$$

Zählt man die Kanten von den Ecken aus, so erhält man die doppelte Kantenzahl, weil jede Kante zweimal gezählt wird :

$$e_3 \cdot 3 + e_4 \cdot 4 + e_5 \cdot 5 = 2k$$

Zählt man die Kanten von den Flächen aus, so erhält man ebenfalls die doppelte Kantenzahl. Daraus ergibt sich dann die Kantenzahl k :

$$f \cdot 3 = 2k$$
$$18 \cdot 3 = 2k$$
$$54 = 2k$$
$$27 = k$$

Aus der Eulerschen Polyederformel erhält man durch Einsetzen der Werte für f und k den Wert e für die Eckenzahl :

$$e - k + f = 2$$
$$e - 27 + 18 = 2$$
$$e = 11$$

Vereinfacht man die beiden Gleichungen bezüglich der Eckenzähligkeit,

$$e_3 + e_4 + e_5 = 11$$

$$e_3 \cdot 3 + e_4 \cdot 4 + e_5 \cdot 5 = 54$$

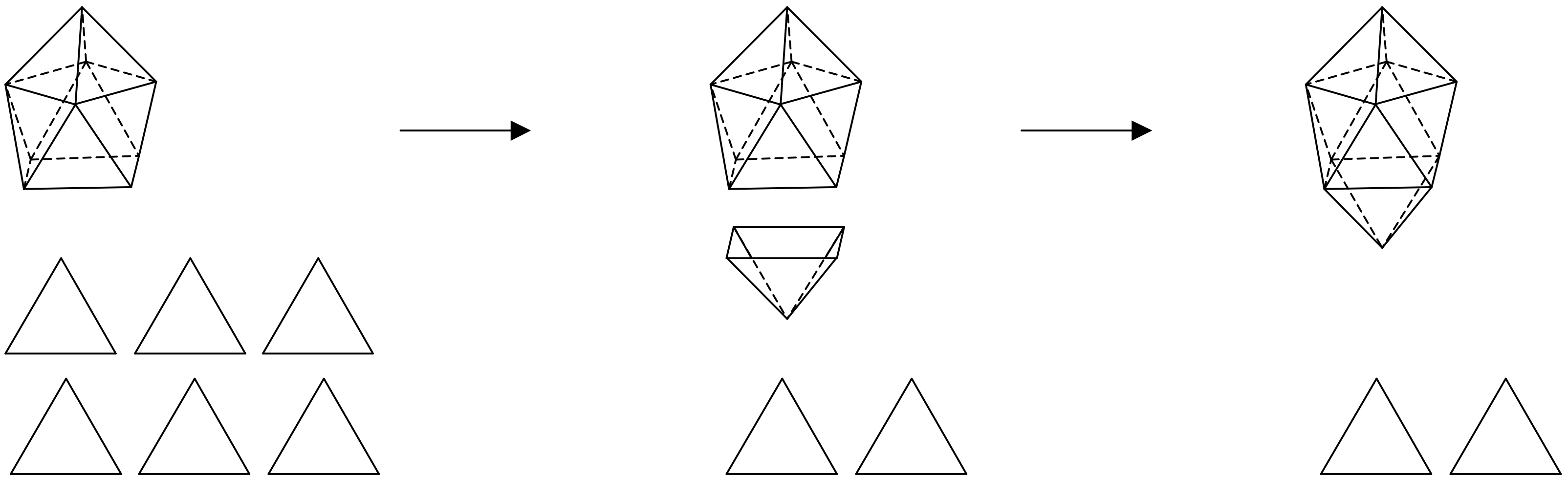
bekommt man eine einfachere Gleichung, die nur noch die Variablen e_4 und e_5 enthält:

$$e_4 + e_5 \cdot 2 = 21$$

Nur das Paar (e_4 ; e_5) = (1; 10) erfüllt sowohl diese Gleichung $e_4 + e_5 \cdot 2 = 21$ als auch die andere $e_3 + e_4 + e_5 = 11$. Bei allen anderen Lösungspaaren ergäben sich für e_3 negative Werte. Das einzige Lösungstripel ist somit (e_3 ; e_4 ; e_5) = (0 ; 1; 10) .

Wenn es also ein konvexes Deltaeder mit 18 Flächen gibt, dürfte es keine 3-zählige Ecke, genau eine 4-zählige Ecke und genau zehn 5-zählige Ecken haben.

Hätte man nun 18 Dreiecke und würde mit 4 dieser Dreiecke eine 4-zählige Ecke bilden, und würde man an diese 4 Dreiecke weitere Dreiecke anhängen, so dass die jeweils entstehenden Körperecken 5-zählig sind, erhielte man zunächst folgende, an eine Bischofsmütze, erinnernde Figur, die aus 12 Dreiecken besteht und unten eine viereckige Öffnung hat:



Um die 5-Zähligkeit der 4 unteren Ecken an der Öffnung zu erreichen, müsste man weitere 4 Dreiecke in Form einer Pyramide hinzufügen mit dem Effekt, dass der entstandene Körper erstens anstatt 18 nur 16 Dreiecke hat und zweitens sogar zwei 4-zählige Ecken aufweist. Für die beiden übrig gebliebenen Dreiecke gäbe es schließlich keine Verwendung.

Warum es keine konvexen Deltaeder mit mehr als 20 Flächen gibt

Nehmen wir an, es gäbe einen derartigen Körper mit e Ecken, k Kanten und f > 20 Flächen. Er sei so aufgebaut, dass er e_3 Ecken mit der Zähligkeit 3, e_4 Ecken mit der Zähligkeit 4 und e_5 Ecken mit der Zähligkeit 5 besitze. Dann gelten folgende Gleichungen und Ungleichungen :

$$f > 20$$
$$e_3 + e_4 + e_5 = e$$

Zählt man die Kanten von den Ecken aus, so erhält man die doppelte Kantenzahl, da ja jede Kante zweimal gezählt wird :

$$e_3 \cdot 3 + e_4 \cdot 4 + e_5 \cdot 5 = 2k$$

Zählt man die Kanten von den Flächen aus, so erhält man ebenfalls die doppelte Kantenzahl. Daraus ergibt sich dann für die Kantenzahl k folgende Ungleichung :

$$f \cdot 3 = 2k$$
$$20 \cdot 3 < 2k$$
$$60 < 2k$$
$$30 < k$$

Die Eulersche Polyederformel $e - k + f = 2$ zusammen mit den Formeln $f \cdot 3 = 2k$ bzw. $k = 1{,}5f$ und $f > 20$ ergibt:

$$e - k + f = 2$$
$$e - 1{,}5f + f = 2$$
$$e - 0{,}5f = 2$$
$$e = 2 + 0{,}5f$$
$$e > 2 + 0{,}5 \cdot 20$$
$$e > 12$$

Des weiteren ergeben sich aus der Eulerschen Formel und den Formeln $3f = 2k$, $e_3 + e_4 + e_5 = e$, $3e_3 + 4e_4 + 5e_5 = 2k$, $e > 12$:

$$e - k + f = 2$$
$$6e - 6k + 6f = 12$$
$$6e - 6k + 4k = 12$$
$$6e - 2k = 12$$
$$6(e_3 + e_4 + e_5) - (3e_3 + 4e_4 + 5e_5) = 12$$
$$3e_3 + 2e_4 + e_5 = 12$$
$$2e_3 + e_4 + e = 12$$
$$2e_3 + e_4 = 12 - e$$
$$2e_3 + e_4 < 12 - 12$$
$$2e_3 + e_4 < 0$$

Die letzte Ungleichung ist offensichtlich falsch, da nach Voraussetzung sowohl e_3 als auch e_4 gleich Null oder natürliche Zahlen sein können. Also kann es einen konvexen Deltaeder mit $f > 20$ nicht geben.

Warum alle (konvexen) Deltaeder gerade Flächenzahlen haben

Zählt man die Kanten über die Flächen, wird jede Kante zweimal gezählt, und man erhält die doppelte Kantenzahl: $f \cdot 3 = 2k$. Das bedeutet, dass f gerade sein muss.

Wie man zeigen kann, dass es keine weiteren als die genannten 8 konvexen Deltaeder gibt

Die folgenden Überlegungen werden am Beispiel eines Körpers mit 10 Dreiecken demonstriert, welche in ähnlicher Weise an anderen Körpern vorgenommen werden können.

Nehmen wir z. B. an, wir hätten einen konvexen Deltaeder mit $f = 10$ vorliegen. Aus $3f = 2k$ und der Polyederformel $e - k + f = 2$ erhält man

$k = 15$
$e = 7$

Aus den Gleichungen $e_3 + e_4 + e_5 = 7$ und $3e_3 + 4e_4 + 5e_5 = 30$ folgt:

$$e_3 + e_4 + e_5 = 7$$

$$3e_3 + 4e_4 + 5e_5 = 30$$

$$3e_3 + 3e_4 + 3e_5 + e_4 + 2e_5 = 30$$

$$3 \cdot 7 + e_4 + 2e_5 = 30$$

$$e_4 + 2e_5 = 9$$

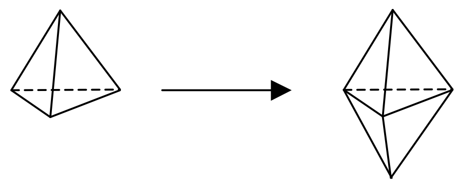
Die letzte Gleichung hat nur drei Lösungspaare d. h. das Gleichungssystem hat nur drei Lösungstripel, wie sie in der folgenden Tabelle dargestellt sind:

$e_3 = 7 - e_4 - e_5$	e_4	e_5
<0	9	0
<0	7	1
0	5	2
1	3	3
2	1	4

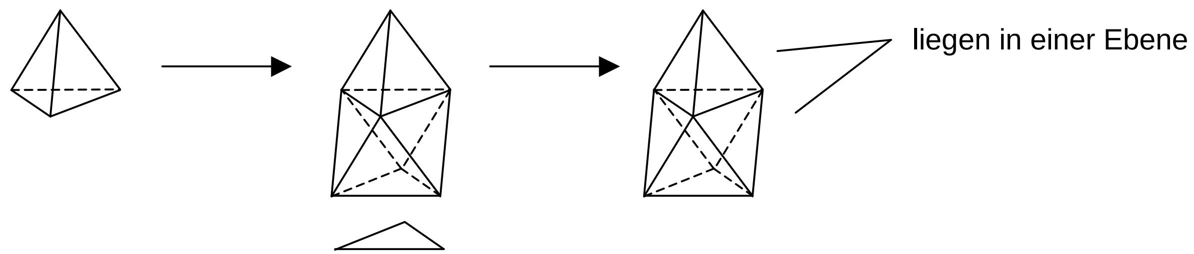
Der einzige Körper zum ersten Lösungstripel (e_3 ; e_4 ; e_5) = (0 ; 5 ; 2) ist die oben angegebene pentagonale Dipyramide. Konstruiert man nämlich zunächst eine 5-zählige Ecke in Form eines (noch beweglichen) Mantels einer 5-seitigen Pyramide und macht man dann eine weitere Mantelecke 5-zählig, so erhält man nach entsprechender Verformung ein Gebilde in Form eines Walmdaches, bestehend aus 8 Dreiecken. Am unteren Rand des „Walmdaches“ gibt es nur 2- und 3-zählige Ecken.
Egal wohin man nun die zwei restlichen Dreiecke anhängt und den Körper zu schließen versucht, entsteht entweder ein Körper mit einer dritten 5-zähligen Ecke, oder ein Körper mit mindestens einer 3-zähligen Ecke, was den Voraussetzungen widerspricht.

Es ist also so, dass man am Mantel der 5-seitigen Pyramide nur 4-zählige Ecken erzeugen muss. Wird der Körper dann geschlossen, erhält man die pentagonale Dipyramide.

Wir zeigen nun, dass zum zweiten Lösungstripel (e_3 ; e_4 ; e_5) = (1 ; 3 ; 3) kein konvexes Deltaeder im Sinne der Definition existiert.
Man bildet zunächst die 3-zählige Ecke in Form eines Tetraedermantels. Würde man eine der unteren Mantelecken 4-zählig machen, erhielte man eine trigonale Dipyramide mit Öffnung, die aus Gründen der Konvexität mit einem Dreieck geschlossen werden müsste. Das Resultat wäre dann ein Deltaeder mit f=6.



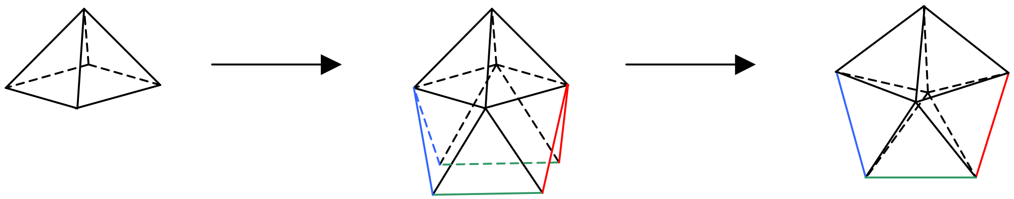
Also müssen alle drei unteren Mantelecken aus Gründen der Konvexität und Vollständigkeit 5-zählig gemacht werden. Dann erhielte man folgenden, an eine Bischofsmütze erinnernden, Körper:



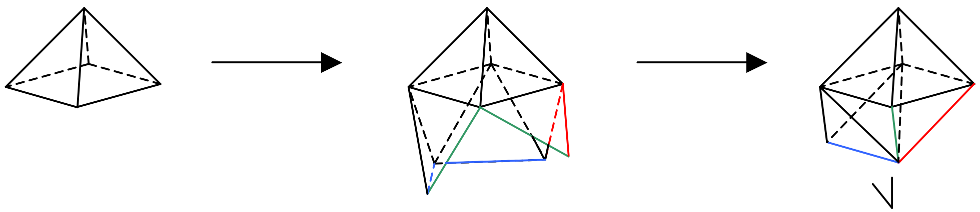
Die noch fehlenden drei 4-zähligen Ecken könnte man nur dadurch erreichen, dass die dreieckige Öffnung der „Bischofsmütze“ durch ein Dreieck geschossen wird. Der so entstandene Körper würde nun alle Bedingungen außer der, dass keine zwei aneinandergrenzenden Dreiecke in einer Ebene liegen sollen, erfüllen.

Etwas schwieriger zu zeigen ist, dass zum dritten Lösungstripel (e_3 ; e_4 ; e_5) = (2 ; 1 ; 4) ebenfalls kein konvexes Deltaeder im Sinne der Definition existiert: Man bildet zunächst die 4-zählige Ecke und erhält den Mantel einer quadratischen Pyramide (, der allerdings nicht starr ist).
Nun kann man keine der vier Mantelecken 3-zählig machen, da man die Konvexitätsbedingung verletzen würde, wenn man anschließende weitere Dreiecke hinzufügte.
Deshalb müssen alle vier Ecken 5-zählig gemacht werden, wodurch man wieder eine Figur ähnlich eine Bischofsmütze erhalten würde. Leider benötigt man aber dafür insgesamt 12 Dreiecke, hat aber nur 10 zur Verfügung.

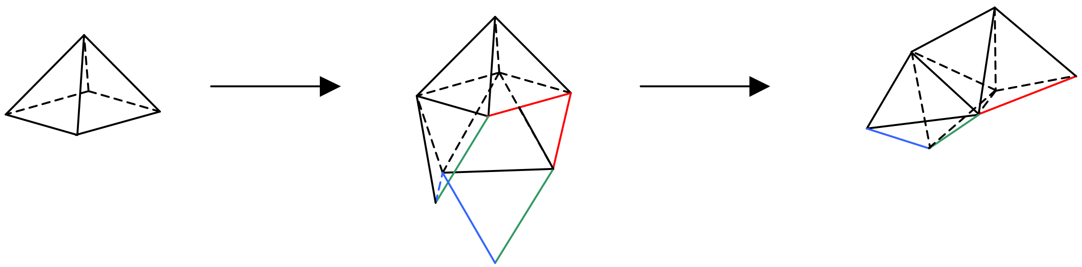
Mit 10 Dreiecken kann man also lediglich zwei der unteren Mantelecken 5-zählig machen.
Im Fall, dass die beiden 5-zähligen Mantelecken einander diagonal gegenüberliegen, hat man nur noch die Möglichkeit den Körper zu verformen und zu schließen, um eine pentagonale Dipyramide zu erhalten, die aber zum Lösungstripel (e_3 ; e_4 ; e_5) = (0 ; 5 ; 2) gehört.



Im anderen Fall, wenn die beiden 5-zähligen Mantelecken nebeneinander liegen, und das letzte noch fehlende Dreieck irgendwo angehängt wird, ergeben sich ein Körper mit zwei Dreiecken, die in einer Ebene liegen bzw. weitere 4-zählige Ecken oder ein nicht konvexer Körper mit einer 6-zähligen Ecke, was der Voraussetzung widerspricht.



liegen in einer Ebene

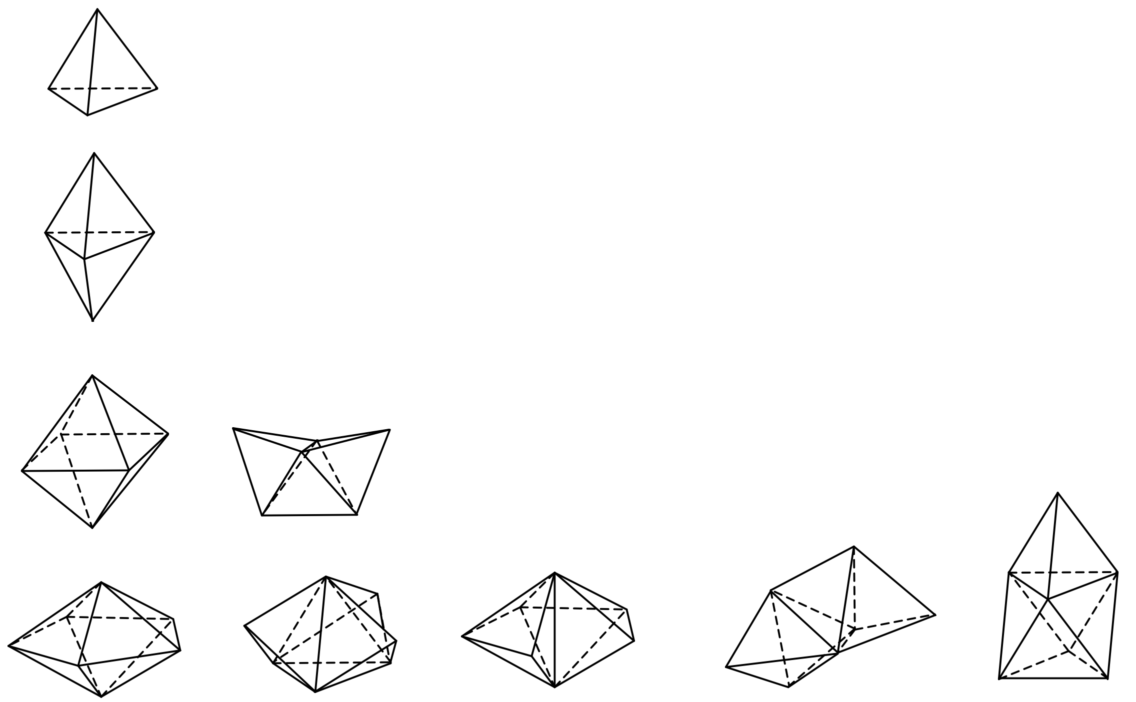


Einige didaktische Bemerkungen (bei weitem nicht vollständig)

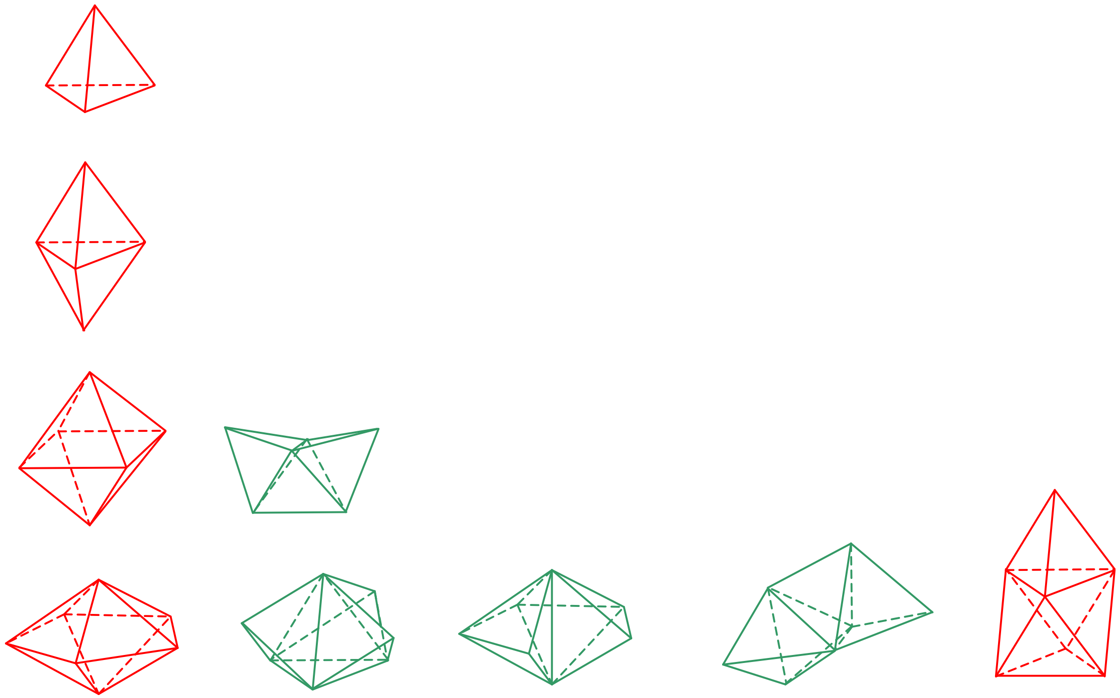
Durch die Beschäftigung mit Polyedern auf praktischer und theoretischer Ebene werden Qualitäten unterschiedlichster Art ausgebildet oder gefördert:

1. Durchführung von Zählprozessen und Entwicklung geeigneter Zählstrategien
2. Überlegungen zur Kombinatorik und entsprechender systematischer Vorgehensweisen
3. Erkennung von Mustern oder Zusammenhängen in Raumgeometrie und Arithmetik
4. Erzeugung von Ordnungen oder Klassifikationen
5. Wechsel der Argumentationsebenen von der Raumgeometrie zur Algebra und zurück
6. Förderung von Fähigkeiten auf der „Eingangsseite“ wie Beobachtung, Wahrnehmung und Konzentration
7. Entwicklung von Fähigkeiten auf der „Ausgangsseite“ wie Raumvorstellung, Phantasie und Kreativität

Der Einstieg kann mehr oder weniger offen sein, und man kann hernach weitere einschränkende Bedingungen vornehmen, wenn man z. B. zu den konvexen Deltaedern kommen möchte.
Beispielsweise würde die Aufgabenstellung, ein Objekt aus maximal 10 Dreiecken zu bauen, zu offenen oder geschlossene Körpern führen. Unter den geschlossenen Körpern könnten speziell folgende gefunden werden:

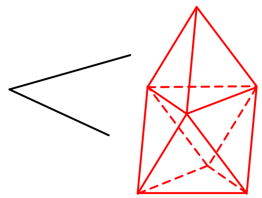


Diese Körper könnte man z. B. in 2 „Klassen“ einteilen, in konvexe und nicht konvexe Körper.

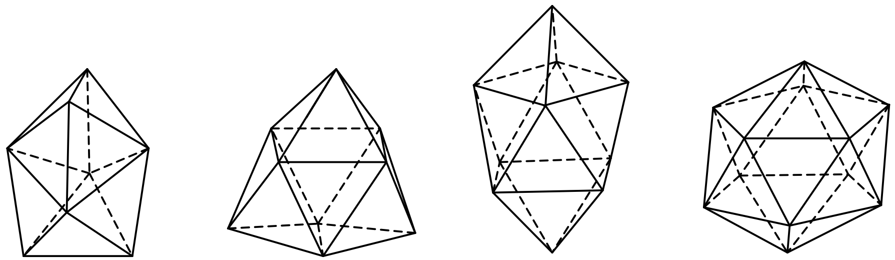


Unter den konvexen Körpern unterscheidet sich ein Körper von den anderen, dadurch dass er aneinandergrenzende Dreiecke besitzt, welche in einer Ebene liegen:

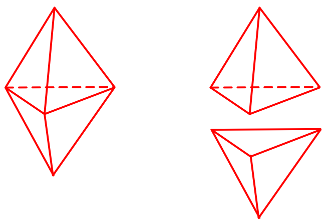
liegen in einer Ebene



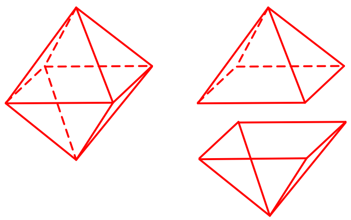
Von solchen Körpern könnte man im weiteren Verlauf absehen und fragen, ob es auch konvexe Deltaeder gibt mit mehr als 10 Dreiecken. Betrachtet man für die bereits gefundenen Körper jeweils die Zahl der verwendeten Dreiecke, wird man auf die Zahlenfolge 4, 6, 8, 10 geführt, so dass man für alle Deltaeder nur geradzahlige Flächenzahlen vermuten könnte. Kreative und ausdauernde Schüler würden womöglich die restlichen Deltaeder mit den Flächenzahlen 12, 14, 16, und 20 finden.



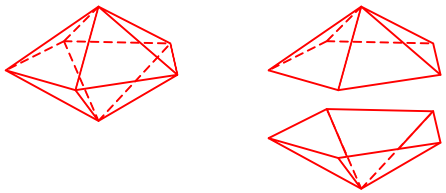
Als Hilfe zum Auffinden könnten Strukturbetrachtungen dienen. Die bisher gefundenen konvexen Deltaeder bestehen alle, mit Ausnahme des Tetraeders, aus zwei gleichen Pyramidenmänteln, sie sind also „oben wie unten“ gleich auf gebaut :



6 = 3 + 3



8 = 4 + 4



10 = 5 + 5

Zum Beispiel könnte man sich für die Struktur des 14-Flächners zunächst folgendes vorstellen: Oben und unten sind jeweils dreiseitige Pyramidenmäntel, die verbunden sind durch einen „Gürtel“ aus den restlichen 8 Dreiecken, was man verkürzt auch so ausdrücken könnte:

14 = 3 + 8 + 3

Aber auch weitere „Bauprinzipien“ wären denkbar:

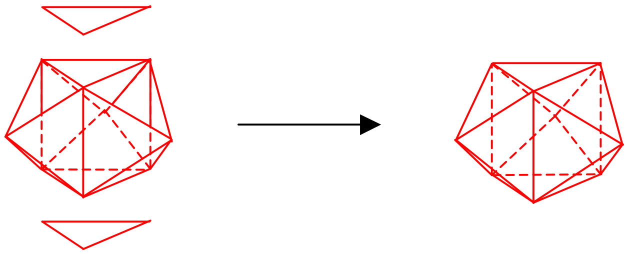
14 = 4 + 6 + 4 14 = 5 + 4 + 5

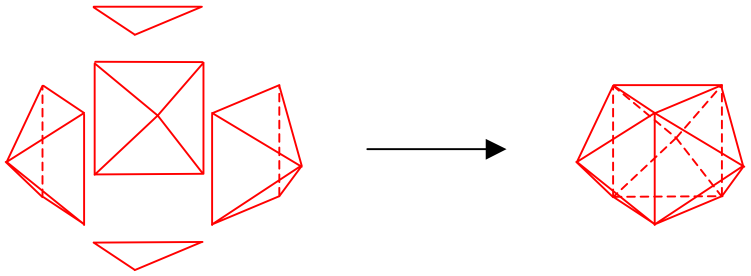
Versucht man allerdings Körper nach diesen „Bauprinzipien“ zu realisieren, stellt man fest, dass dies wohl nicht geht.

Eine vollständige systematische Vorgehensweise auf der arithmetischen Ebene kann hier helfen. Die Zahl 14 kann man auf genau sechs Arten in eine Summe mit drei Summanden , wobei zwei Summanden gleich sind, zerlegen:

14 = 6 + 2 + 6
14 = 5 + 4 + 5
14 = 4 + 6 + 4
14 = 3 + 8 + 3
14 = 2 + 10 + 2
14 = 1 + 12 + 1

Nur die letzte Zerlegung, die weiter modifiziert werden kann, in der Form 14 = 1 + 12 + 1 = 1 + 4 + 4 + 4 + 1
liefert folgenden Körper:





Ähnliche Strukturüberlegungen könnten zum Auffinden des 12- , 16- oder sogar des 20-Flächners angestellt werden.

Sollte das Auffinden der konvexen Deltaeder für einzelne Schüler oder Schülergruppen zu schwierig sein, kann man die Betrachtungen zur Ecken- Kanten- und Flächenzahl sowie die Heuristik der Eulerschen Polyederformel auch auf nichtkonvexe Körper, bzw. Körper die topologisch äquivalent der Kugel sind, anwenden, da die Eulersche Formel eine topologische Eigenschaft beschreibt. Die Überlegungen sind dann entsprechend zu führen.

Wie man sieht, bietet bereits die Einstiegsphase für den Lernenden Möglichkeiten zum Erkennen von Gemeinsamkeiten und Unterschieden, zur „Klassifizierung“ und zu kreativem Tun, und ebenso kann man sich bei der Heuristik und beim Beweis der Eulerschen Polyederformel vorstellen, dass Möglichkeiten zu unterschiedlichen Systematiken beim Zählprozess, die Möglichkeit des Ebenenwechsels von der Raumgeometrie zur Algebra und weitere Möglichkeiten, wie sie unter 1. - 7. angedeutet sind, geboten werden.

Descartescher Winkeldefizit

Bei ebenen konvexen Polygonen mit n Ecken bzw. n Seiten und den Innenwinkeln $\alpha_1, ..., \alpha_n$ mit $\alpha_i<\pi$ für i=1,...,n beträgt die Summe der Innenwinkel

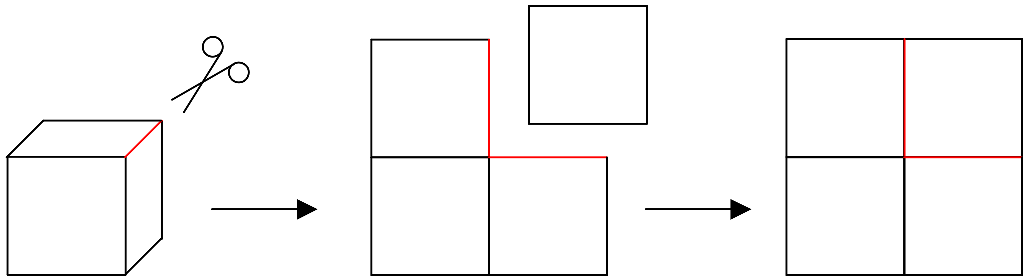
$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = (n-2)\cdot\pi$$

und die Summe der (sämtlich positiven) Außenwinkel

$$\sum_{i=1}^{n}(\pi-\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n}\pi - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i = n\pi-(n-2)\pi = 2\pi$$

welche unabhängig von der Eckenzahl n ist. Jeder Außenwinkel $(\pi-\alpha_i)$ misst offenbar die Abweichung von der geraden Linie oder das diesbezüglich bestehende Winkeldefizit. Die Summe aller Winkeldefizit bezeichnet man als <u>ebenes Winkeldefizit des konvexen Polygons</u>.

Man könnte nun fragen, ob es bei konvexen Polyedern ein Analogon zum ebenen Winkeldefizit gibt. Betrachten wir hierzu das Beispiel des Würfels. Eine räumliche Ecke wird gebildet aus 3 ebenen rechten Winkeln. Würde man einen weiteren rechten Winkel hinzufügen, würde die Eckenstruktur verloren gehen, und im Idealfall bekäme man ein ebenes Gebilde mit dem Vollwinkel 2π .



Jeder Ecke fehlt sozusagen ein rechter Winkel, und das einzelne Winkeldefizit ergäbe sich zu $2\pi - 3 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Das gesamte Winkeldefizit summiert über die 8 Ecken des Würfels wäre dann $8 \cdot \frac{\pi}{2} = 4\pi$.

Untersuchen wir, zu welchem Ergebnis man durch analoge Betrachtungen bei den konvexen Deltaedern kommt:

Gegeben sei ein Deltaeder mit $e = \sum_{i=3}^{5} e_i$ Ecken , wobei e_i die Anzahl der Ecken mit dem Grad i für i=3,4,5 bedeutet. Die Zählung der Kanten über die Ecken liefert

$$\sum_{i=3}^{5} i \cdot e_i = 2k$$

Die Zählung der Kanten über die Flächen liefert

$$f \cdot 3 = 2k$$

$$f = \frac{2}{3} \cdot k$$

Zusammen mit der Eulerschen Formel $e - k + f = 2$ erhält man daraus

$$e - \frac{k}{3} = 2$$

Das gesamte Winkeldefizit Δ beträgt nun

$$\Delta = e_3 \cdot \left(2\pi - 3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + e_4 \cdot \left(2\pi - 4 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + e_5 \cdot \left(2\pi - 5 \cdot \frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= \left(\sum_{i=3}^{5} e_i\right) \cdot 2\pi - \left(\sum_{i=3}^{5} i \cdot e_i\right) \cdot \frac{\pi}{3} =$$
$$= e \cdot 2\pi - 2k \cdot \frac{\pi}{3} =$$
$$= 2\pi\left(e - \frac{k}{3}\right) =$$
$$= 2\pi \cdot 2 =$$
$$= 4\pi$$

Das heißt, das Winkeldefizit hat bei konvexen Deltaedern ebenfalls das Maß 4π.

Zusammenhang zwischen Descarteschem Winkeldefizit und Eulerscher Polyederformel

Gegeben sei ein Polyeder P mit e Ecken, k Kanten und f Flächen. Die Menge F gebe an, welche ebenen Polygone das Polyeder P begrenzen.

F:= { i I iιIN, P hat ein regelmäßiges i-Gon }.

Zu jedem iιF gibt es eine Zahl f_i, die angibt wie viele i-Gone P hat. Dann gelten folgende Formeln:

$$\sum_{i \in F} f_i = f$$

$$\sum_{i \in F} f_i = 2k \quad \text{(Zählung der Kanten über die Flächen)}$$

Für jedes i-Gon von P ist die Summe der Innenwinkel
$(i-2)\pi$.

Für j=1,...,e sei δ_j der Winkeldefizit an der j-ten Ecke. Dann ist $w_j = 2\pi - \delta_j$ die Winkelsumme der Innenwinkel der Polygone, die die j-te Ecke bilden, und die gesamte Winkelsumme W ist

$$W = \sum_{j=1}^{e} w_j = \sum_{j=1}^{e} 2\pi - \delta_j = 2\pi e - \sum_{j=1}^{e} \delta_j = 2\pi e - \delta, \text{ wobei}$$

$$\delta := \sum_{j=1}^{e} \delta_j \text{ das gesamte Winkeldefizit des Polyeders P bezeichnet.}$$

Andererseits ist

$$W = \sum_{i \in F} f_i \cdot (i-2)\pi = \pi \sum_{i \in F} f_i \cdot i - 2\pi \sum_{i \in F} f_i = 2\pi k - 2\pi f$$

Daraus folgt

$$2\pi e - \delta = 2\pi k - 2\pi f$$

$$\delta = 2\pi e - 2\pi k + 2\pi f$$

$$\delta = 2\pi(e - k + f)$$