Volumina der 8 konvexen Deltaeder

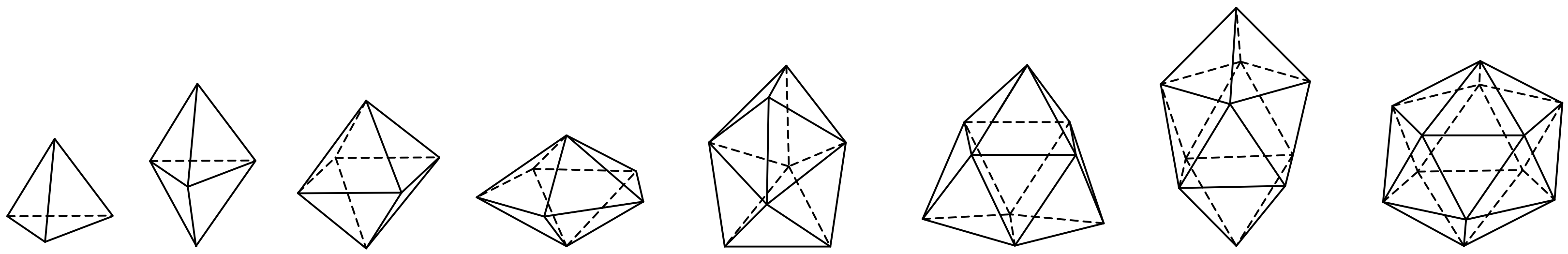
Arno Fehringer Juli 2007

Die Bestimmung der Volumina (in Abhängigkeit von der Kantelänge a) bzw. die Herleitung einer entsprechenden Formel für die konvexen Delataeder stellen relativ hohe Anforderungen und verlangen vom Handelnden Kompetenzen sowohl in der Raumgeometrie als auch der Algebra. Tetraeder, 6-Deltaeder, Oktaeder, und 14-Deltaeder sind „Standard“. Schwieriger zu berechnen sind das 10-, 12-, 16-Deltaeder und das Ikosaeder.

Beim 12-Deltaeder kommt zusätzlich zur Kante a noch die Breite b = ta hinzu. Dabei ist t eine Lösung der Gleichung 4. Grades ,

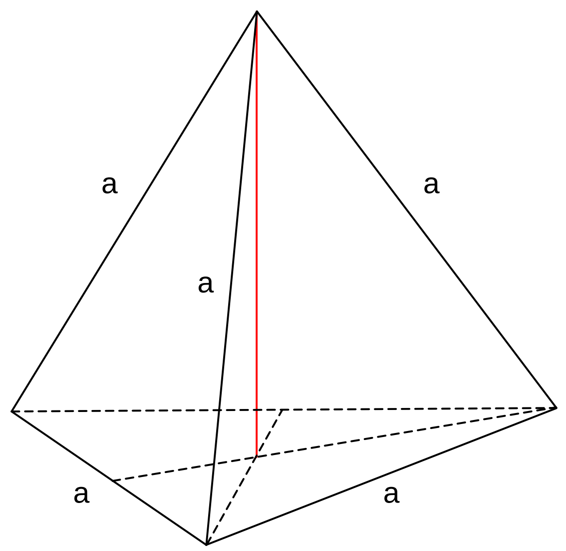
$$t^4 - 2t^3 - 7t^2 + 4t + 8 = 0.$$

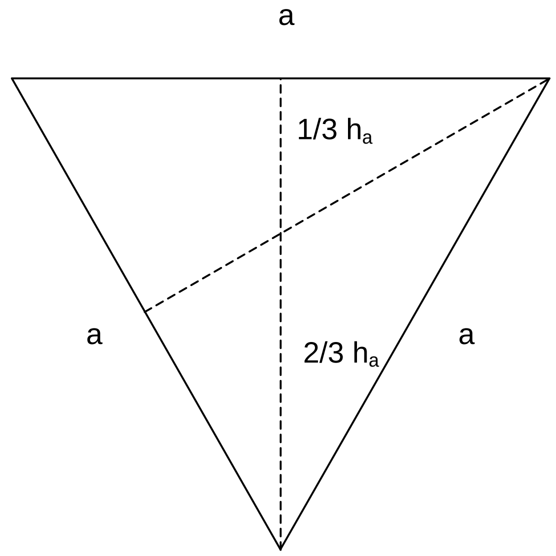
Die Nullstellen der Gleichung 4. Grades ergeben sich aus den (3 reellen) Lösungen der sogenannten Kubischen Resolventen und können bestenfalls trigonometrisch dargestellt werden („casus irreducibilis“).

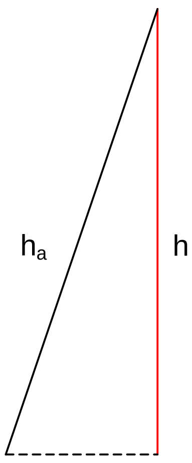


4-	6-	8-	10-	12-	14-	16-	20-Deltaeder
(Tetraeder)		(Oktaeder)					(Ikosaeder)

Volumen des Tetraeders







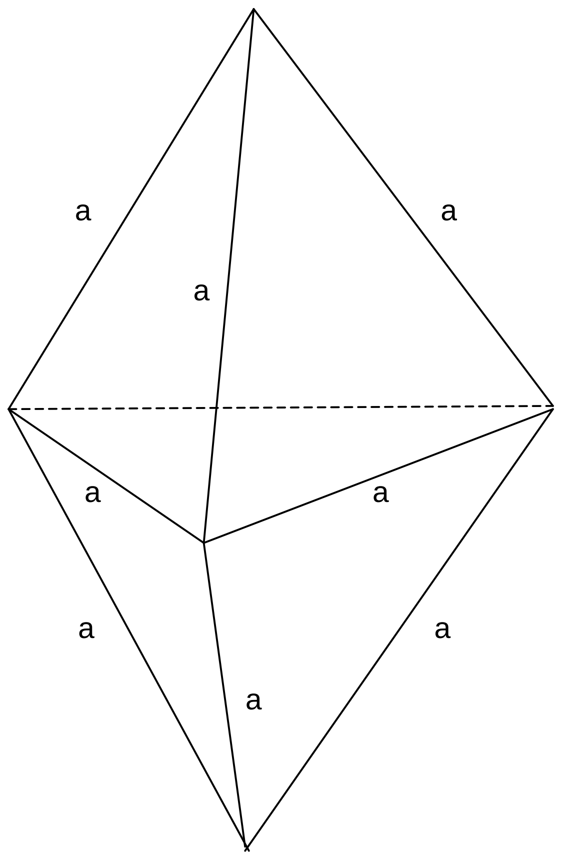
h_a = sqrt(3)/2 a
$h_a^2 = 3/4a^2$

$h^2 = h_a^2 - (1/3h_a)^2$
$h^2 = 8/9h_a^2$
$h^2 = 8/9\ 3/4\ a^2$
$h^2 = 2/3\ a^2$
h = sqrt(6)/3 a

V = 1/3·G h = 1/3 ·1/2 ·a h_a · h = 1/3 ·1/2 ·a sqrt(3)/2 a · sqrt(6)/3 a = sqrt(18)/36·a^3 = sqrt(2)/12·a^3

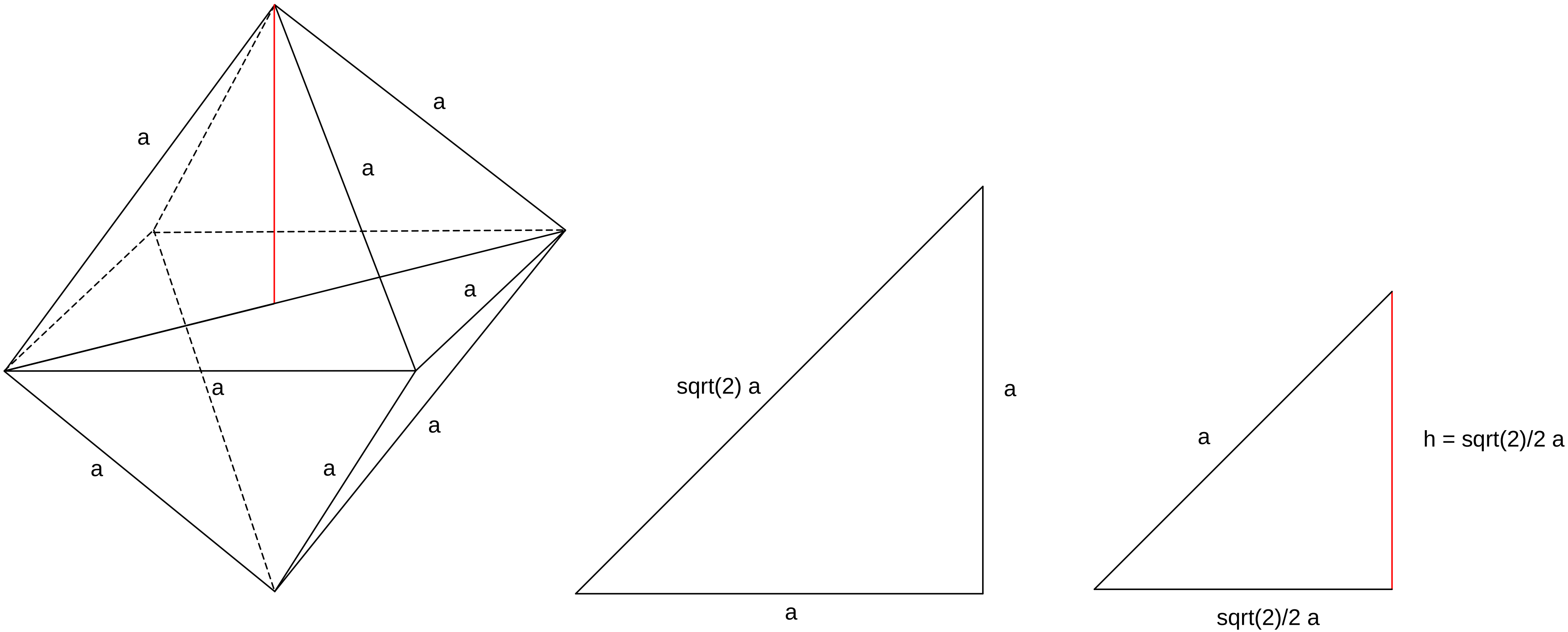
V = sqrt(2)/12·a^3

Volumen des 6-Deltaeders



$$\boxed{V = \mathrm{sqrt}(2)/6 \cdot a^3}$$

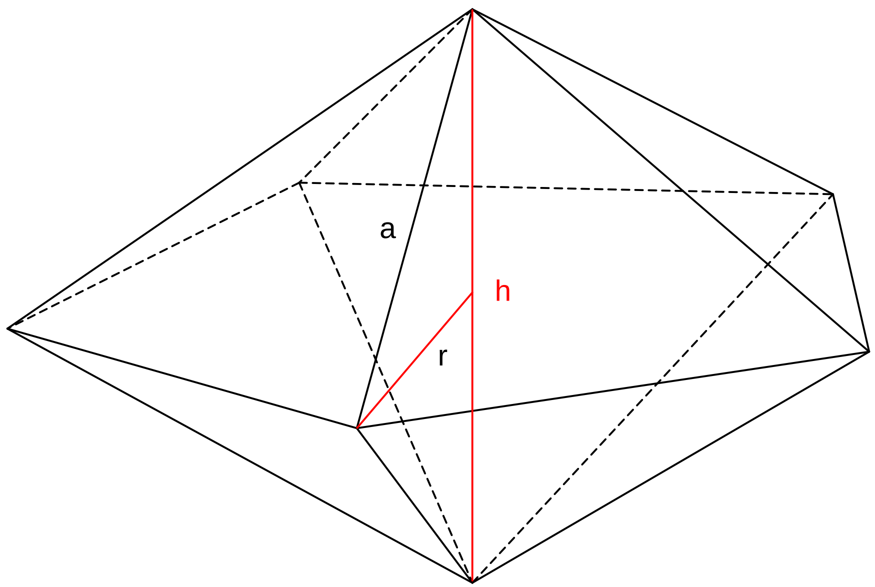
Volumen des Oktaeders

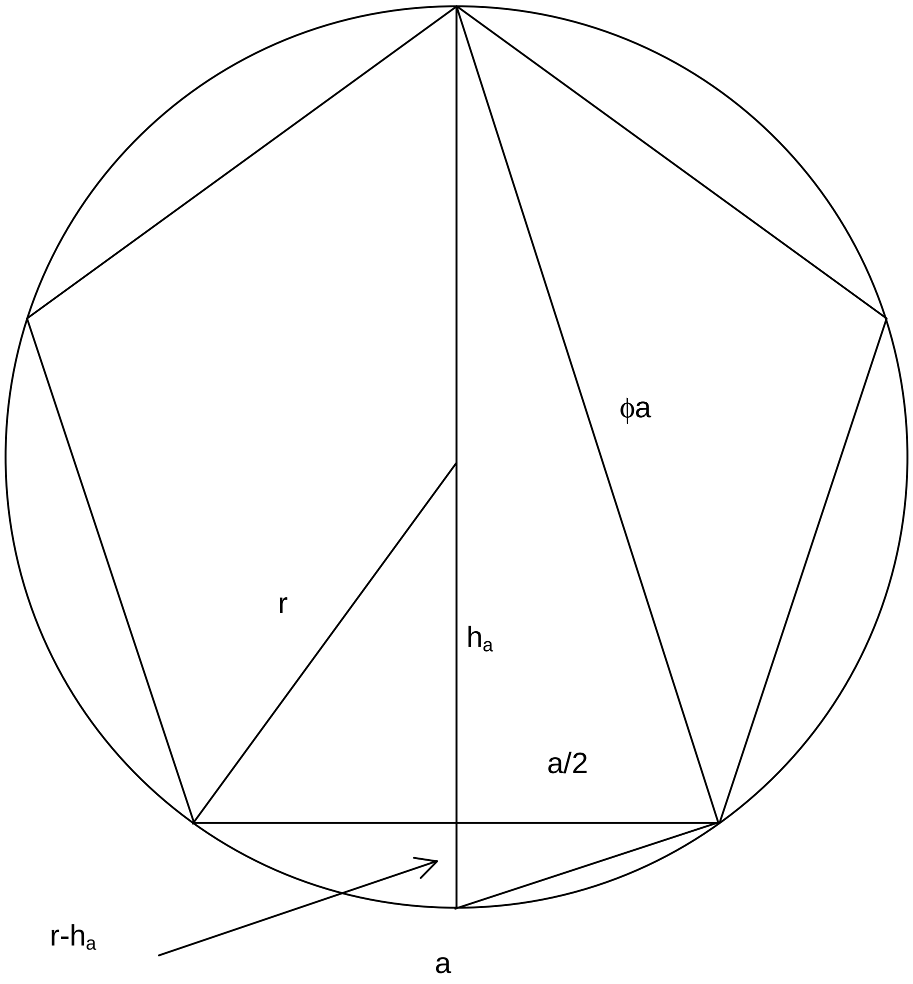


V = 2· 1/3· G h = 2· 1/3 · a^2 · sqrt(2)/2 a = sqrt(2)/3 a^3

$\boxed{V = \text{sqrt}(2)/3\ a^3}$

Volumen des 10-Deltaeders





(1) $(a/2)^2 + h_a^2 = r^2$

(2) $(\phi a)^2 = (r + h_a)2r$ mit $\phi = (\mathrm{sqrt}(5)+1)/2$, $\phi^2 = \phi+1$ (ϕ = “Goldene Schnittzahl”)

Bestimmung von r:

(2) nach h_a in (1)

$(a/2)^2 + ((\phi^2a^2 – 2r^2)^2 /4r^2 = r^2$

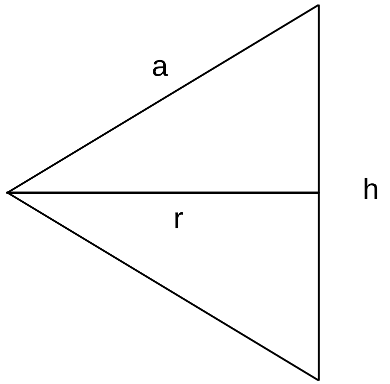
$a^2r^2 + \phi^4a^4 -4\phi^2a^2r^2 + 4r^4 = 4r^4$

$4\phi^2a^2r^2 - a^2r^2 = \phi^4a^4$

$(4\phi^2 - 1)a^2r^2 = \phi^4a^4$

$(4\phi^2 - 1) r^2 = \phi^4a^2$

$r^2 = (3\phi+2)/(4\phi+3) \cdot a^2$ (wegen $\phi^2 = \phi+1$)



Berechnung der Körperhöhe:

$h=2sqrt(a^2 - r^2)$

$h=2sqrt(a^2 – (3\phi+2)/(4\phi+3) \cdot a^2)$

$h=2sqrt((\phi+1)/(4\phi+3)) \cdot a$

Berechnung des Volumens:
Der Körper setzt sich zusammen aus 5 kongruenten unregelmäßigen Tetraedern mit 5 Kantenlängen a und einer Kante H. Die Tetraeder haben das Volumen V_T, was mit der Fehringerschen Formel berechnet werden kann:

$$V = 5V_T$$

$V_T^2 = 1/144 \cdot (3h^2a^4 – h^4a^2)$

$V_T^2 = 1/144 \cdot ((84\phi+52)/(4\phi+3)^2)\ a^6$

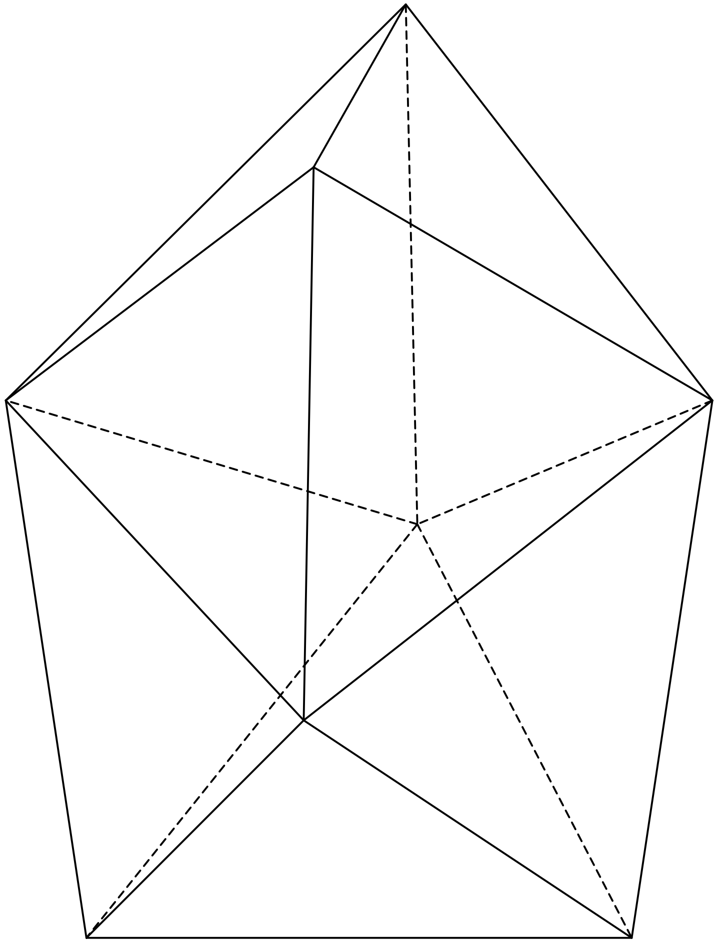
$V_T = 1/6 \cdot \mathrm{sqrt}(21\phi+13)/(4\phi+3)^2 a^3$

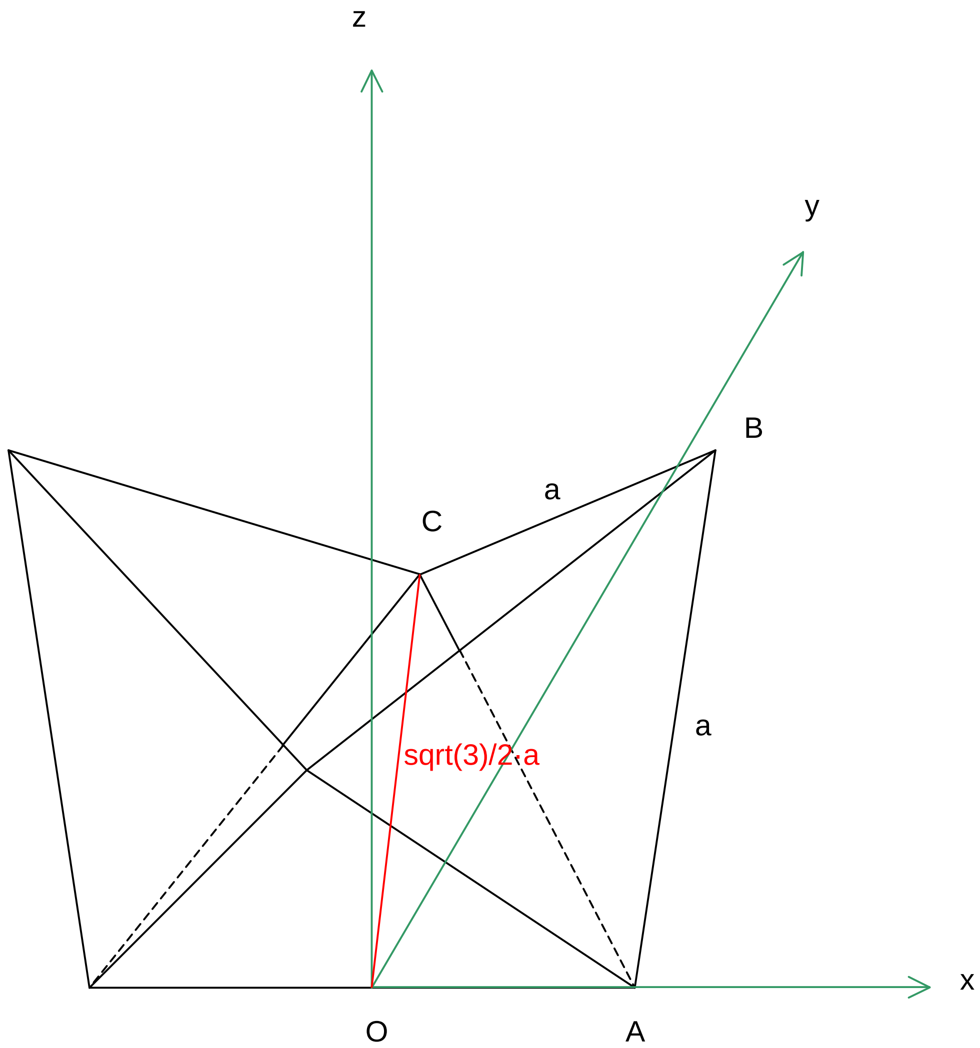
$V = 5/6 \cdot \mathrm{sqrt}\ (21\phi+13)/(4\phi+3)^2 a^3$

Mit $\phi = (\mathrm{sqrt}(5)+1)/2$ zusammen mit den Vereinfachungsmöglichkeiten für Doppelwurzeln ergibt sich:

$\boxed{V = 1/12 \cdot (3 - \mathrm{sqrt}(5))a^3}$

Volumen des 12-Deltaeders



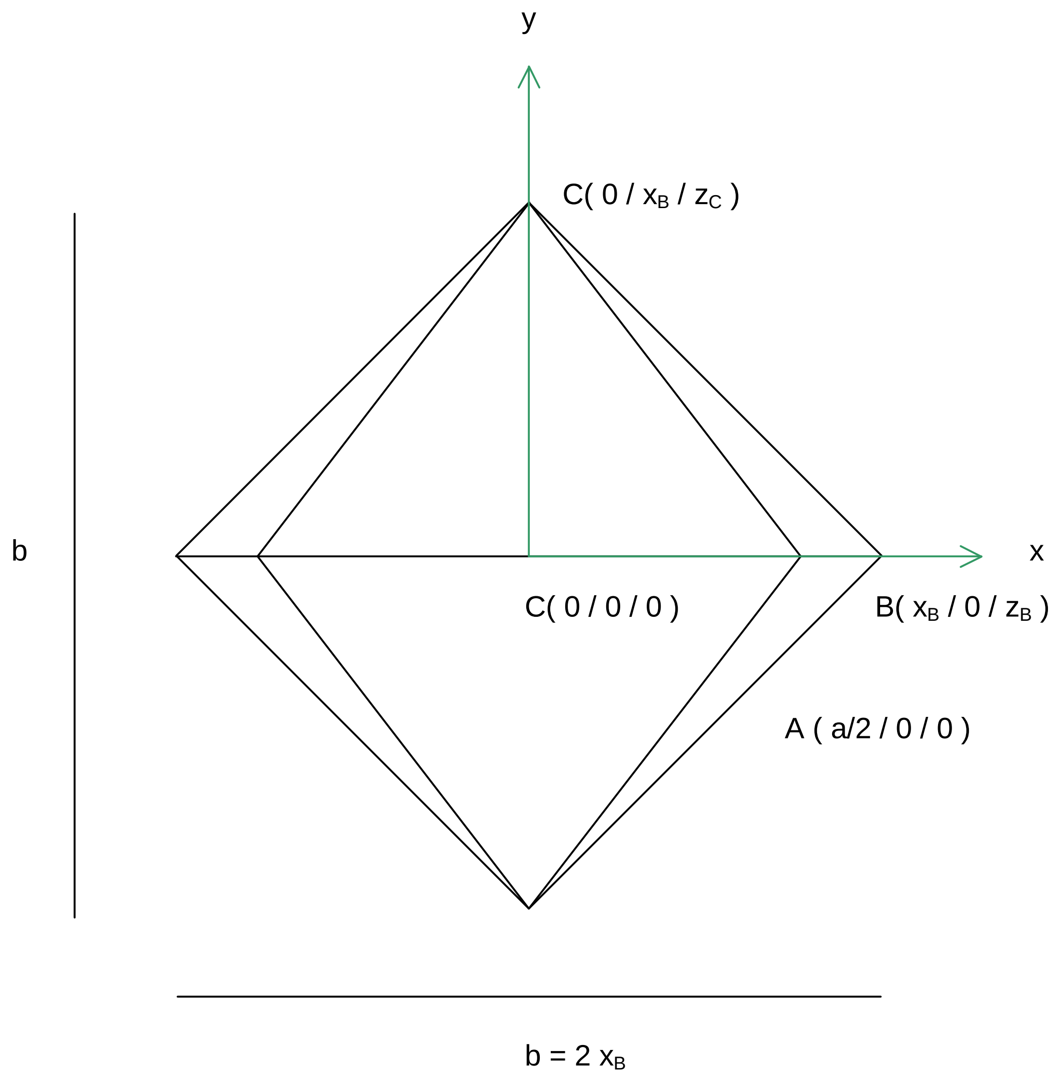


(1) $y_c = x_B$ => $b=2x_B$

(2) $x_B^2 + z_C^2 = (\mathrm{sqrt}(3)/2 \cdot a)^2$

(3) $(x_B - a/2)^2 + z_B^2 = a^2$

(4) $2 x_B^2 + (z_B - z_C)^2 = a^2$



(2) nach z_C in (4):

(4') $2\, x_B^2 + (z_B – \mathrm{sqrt}(3/4 \cdot a^2 - x_B^2))^2 = a^2$

(4') nach z_B^2 :

$2\, x_B^2 + (z_B – \mathrm{sqrt}(3/4 \cdot a^2 - x_B^2))^2 = a^2$

$(z_B – \mathrm{sqrt}(3/4 \cdot a^2 - x_B^2))^2 = a^2 - 2\, x_B^2$

$z_B – \mathrm{sqrt}(3/4 \cdot a^2 - x_B^2) = \mathrm{sqrt}(a^2 - 2\, x_B^2)$

$z_B = \mathrm{sqrt}(a^2 - 2\, x_B^2) + \mathrm{sqrt}(3/4 \cdot a^2 - x_B^2)$

$z_B^2 = a^2 - 2\, x_B^2 + 2\mathrm{sqrt}((a^2 - 2\, x_B^2)(3/4 \cdot a^2 - x_B^2)) + 3/4 \cdot a^2 - x_B^2$

$z_B^2 = 7/4 \cdot a^2 - 3x_B^2 + 2\mathrm{sqrt}((a^2 - 2\, x_B^2)(3/4 \cdot a^2 - x_B^2))$

z_B^2 in (3) :

$(x_B - a/2)^2 + 7/4 \cdot a^2 - 3x_B^2 + 2\mathrm{sqrt}((a^2 - 2\, x_B^2)(3/4 \cdot a^2 - x_B^2)) = a^2$

$x_B^2 - a\, x_B + a^2/4 + 7/4 \cdot a^2 - 3x_B^2 + 2\mathrm{sqrt}((a^2 - 2\, x_B^2)(3/4 \cdot a^2 - x_B^2)) = a^2$

$- a\, x_B + 2a^2 - 2x_B^2 + 2\mathrm{sqrt}((a^2 - 2\, x_B^2)(3/4 \cdot a^2 - x_B^2)) = a^2$

$2\mathrm{sqrt}((a^2 - 2x_B^2)(3/4 \cdot a^2 - x_B^2)) = x_B(a + 2x_B) - a^2$

$4(a^2 - 2x_B^2)(3/4 \cdot a^2 - x_B^2) = x_B^2(a + 2x_B)^2 - 2x_B(a + 2x_B)a^2 + a^4$

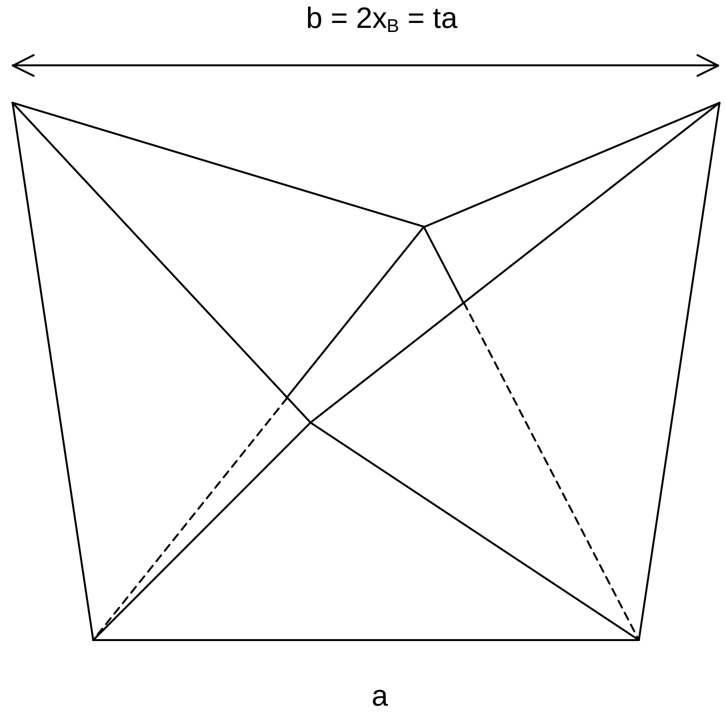
$3a^4 - 4a^2x_B^2 - 6a^2x_B^2 + 8x_B^4 = x_B^2a^2 + 4ax_B^3 + 4x_B^4 - 2a^3x_B - 4a^2x_B^2 + a^4$

$3a^4 - 7a^2x_B^2 + 4x_B^4 = 4ax_B^3 - 2a^3x_B + a^4$

$4x_B^4 - 4ax_B^3 - 7a^2x_B^2 + 2a^3x_B + 2a^4 = 0$

Substitution: $2x_B = ta \Rightarrow x_B = t/2 \cdot a$

$t^4 - 2t^3 - 7t^2 + 4t + 8 = 0$



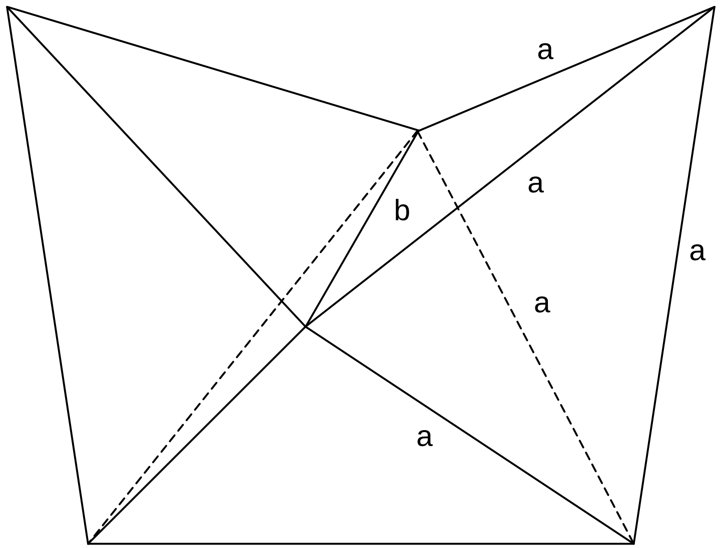
Zur Lösung der biquadratischen Gleichung in t :

Eine graphische Darstellung der entsprechenden Funktion 4. Grades mit dem Computeralgebrasystem MuPAD zeigt vier Nullstellen.

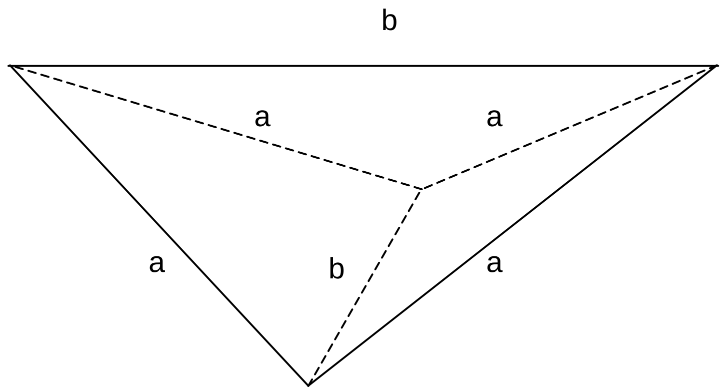
Im Buch „MATHEMATIK , Formeln, Regeln, Merksätze, Verlag Buch und Zeit, 1998“ steht auf S. 109, dass zunächst die Lösungen der zugeordneten kubischen Resolventen bestimmt werden sollen. Da diese drei Lösungen reell sind, also dem sogenannten „casus irreducibilis“ entsprechen, lassen sich diese nur komplex oder bestenfalls trigonometrisch darstellen. Aus diesen Lösungen ergeben sich dann die vier Lösungen der biquadratischen Gleichung.
Das Computeralgebrasystem MuPAD liefert mit dem Befehl „ numeric::solve(t^4-2*t^3-7*t^2+4*t+8)“ folgende vier Lösungen:
-1 , -1,778457118 , 1,289168546 , 3,489288572

Von diesen ist nur die dritte brauchbar. Es ergibt sich $b = 2x_B = ta = 1{,}289168546.. a$

Volumen $3V_1$



Volumen V_2



Die Volumina V_1 und V_2 ergeben sich mithilfe der <u>Fehringerschen Volumenformel</u> für unregelmäßige Tetraeder mit den Kanten a,b,c,p,q,r:

$V^2 = 1/144\ (a^2b^2(p^2+q^2-r^2)+a^2c^2(p^2-q^2+r^2)+b^2c^2(-p^2+q^2+r^2)+a^2p^2(q^2+r^2)\ +b^2q^2(p^2+r^2)+c^2r^2(p^2+q^2)-a^2p^2(a^2+p^2)-b^2q^2(b^2+q^2)-c^2r^2(c^2+r^2)-p^2q^2r^2)$

Für V_1 gilt: a, b, c=p=q=r=a

$V_1^2 = 1/144\ (a^2b^2(p^2+q^2-r^2)+a^2c^2(p^2-q^2+r^2)+b^2c^2(-p^2+q^2+r^2)+a^2p^2(q^2+r^2)\ +b^2q^2(p^2+r^2)+c^2r^2(p^2+q^2)-a^2p^2(a^2+p^2)-b^2q^2(b^2+q^2)-c^2r^2(c^2+r^2)-\ p^2q^2r^2)$

$V_1^{\ 2} = 1/144\ (a^2b^2(a^2+a^2-a^2)+a^2a^2(a^2-a^2+a^2)+b^2a^2(-a^2+a^2+a^2)+a^2a^2(a^2+a^2)\ +b^2a^2(a^2+a^2)+a^2a^2(a^2+a^2)-a^2a^2(a^2+a^2)-b^2a^2(b^2+a^2)-a^2a^2(a^2+a^2)-a^6)$

$V_1^{\ 2} = 1/144\ (a^2b^2(a^2)+a^2a^2(a^2)+b^2a^2(a^2)+a^2a^2(2a^2)\ +b^2a^2(2a^2)+a^2a^2(2a^2)-a^2a^2(2a^2)-b^2a^2(b^2+a^2)-a^2a^2(2a^2)-a^6)$

$V_1{}^2 = 1/144\ (a^4b^2+a^6+b^2a^4+2a^6+2b^2a^4+2a^6-2a^6-b^2a^2(b^2+a^2)-2a^6-a^6)$

$V_1{}^2 = 1/144\ (a^4b^2+b^2a^4+2a^6+2b^2a^4+2a^6-2a^6-b^4a^2-b^2a^4-2a^6)$

$V_1{}^2 = 1/144\ \ (3a^4b^2-b^4a^2)$

$V_1{}^2 = 1/144\cdot a^2b^2(3a^2-b^2)$

$V_1 = 1/12 \cdot ab \cdot \mathrm{sqrt}(3a^2-b^2)$

Für V_2 gilt: a, b, c=p=r=a, q=b

$V_2{}^2 = 1/144\ (a^2b^2(p^2+q^2-r^2)+a^2c^2(p^2-q^2+r^2)+b^2c^2(-p^2+q^2+r^2)+a^2p^2(q^2+r^2)\ +b^2q^2(p^2+r^2)+c^2r^2(p^2+q^2)-a^2p^2(a^2+p^2)-b^2q^2(b^2+q^2)-c^2r^2(c^2+r^2)-p^2q^2r^2)$

$V_2{}^2 = 1/144\ (a^2b^2(b^2)+a^4(2a^2-b^2)+b^2a^2(b^2)+a^4(b^2+a^2)\ +2a^2b^4+a^4(a^2+b^2)-2a^6-2b^6-2a^6 - a^2b^2a^2)$

$V_2{}^2 = 1/144\ (a^2b^4+2a^6- a^4b^2+b^4a^2+a^4b^2+a^6+2a^2b^4+a^6+a^4b^2-2a^6-2b^6-2a^6 - a^4b^2)$

$V_2{}^2 = 1/144\ (4a^2b^4-2b^6)$

$V_2{}^2 = 1/144 \cdot 2\ b^4 \cdot (2a^2-b^2)$

$V_2 = 1/12 \cdot \mathrm{sqrt}(2) \cdot b^2 \cdot \mathrm{sqrt}(2a^2-b^2)$

Volumen des 12-Deltaeders :

$V = 3V_1 + 3V_1 + V_2$
$V = 6V_1 + V_2$

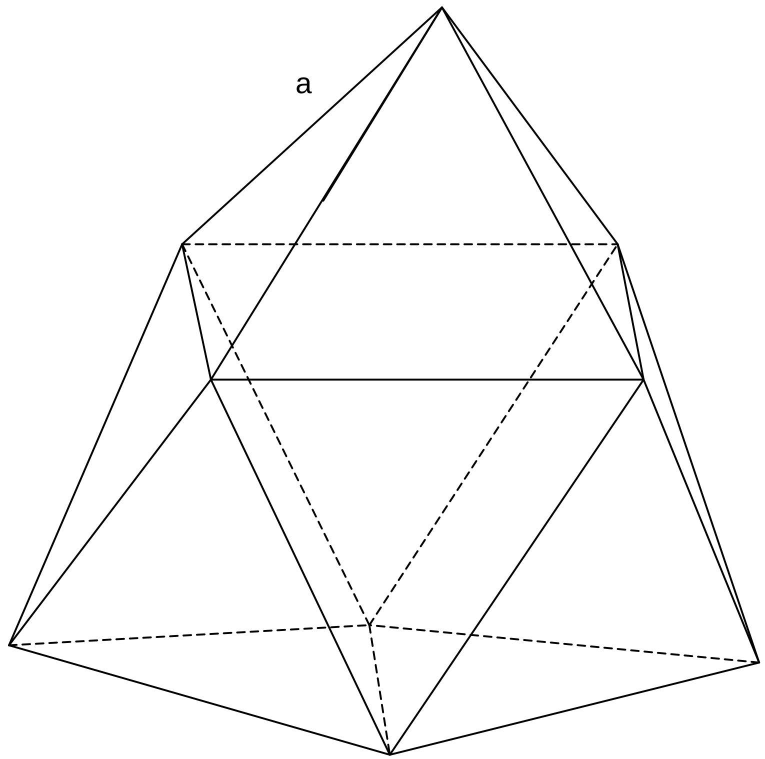
$$\boxed{V = 1/2 \cdot ab \cdot \mathrm{sqrt}(3a^2-b^2) + 1/12 \cdot \mathrm{sqrt}(2) \cdot b^2 \cdot \mathrm{sqrt}(2a^2-b^2)}$$

Volumen des 14-Deltaeders

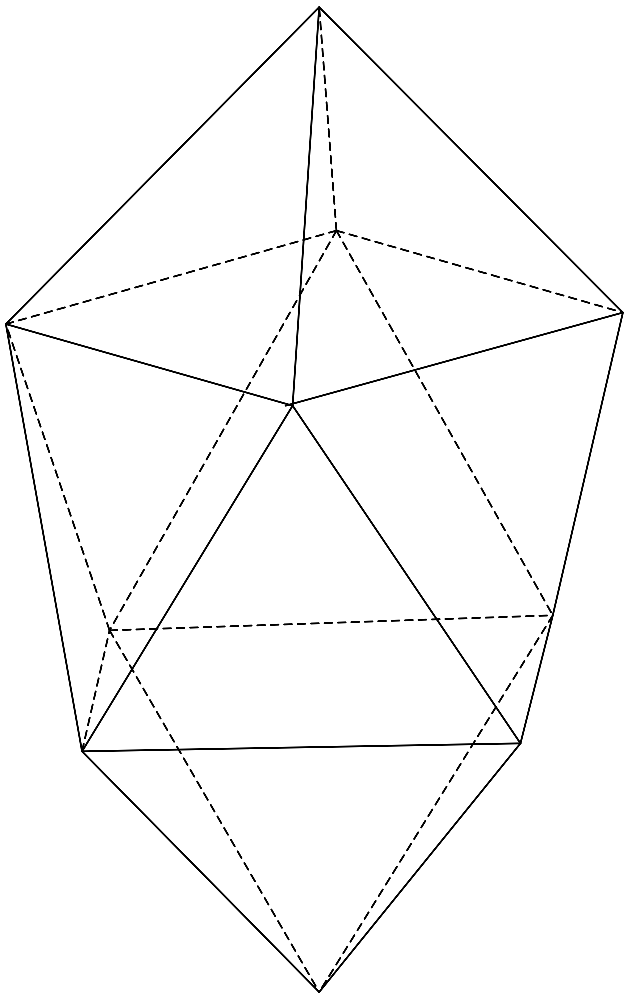
$V = 1/2 \cdot a \cdot \mathrm{sqrt}(3)/2 \cdot a \cdot a + 3 \cdot 1/3 \cdot a^2 \cdot \mathrm{sqrt}(2)/2 \cdot a$

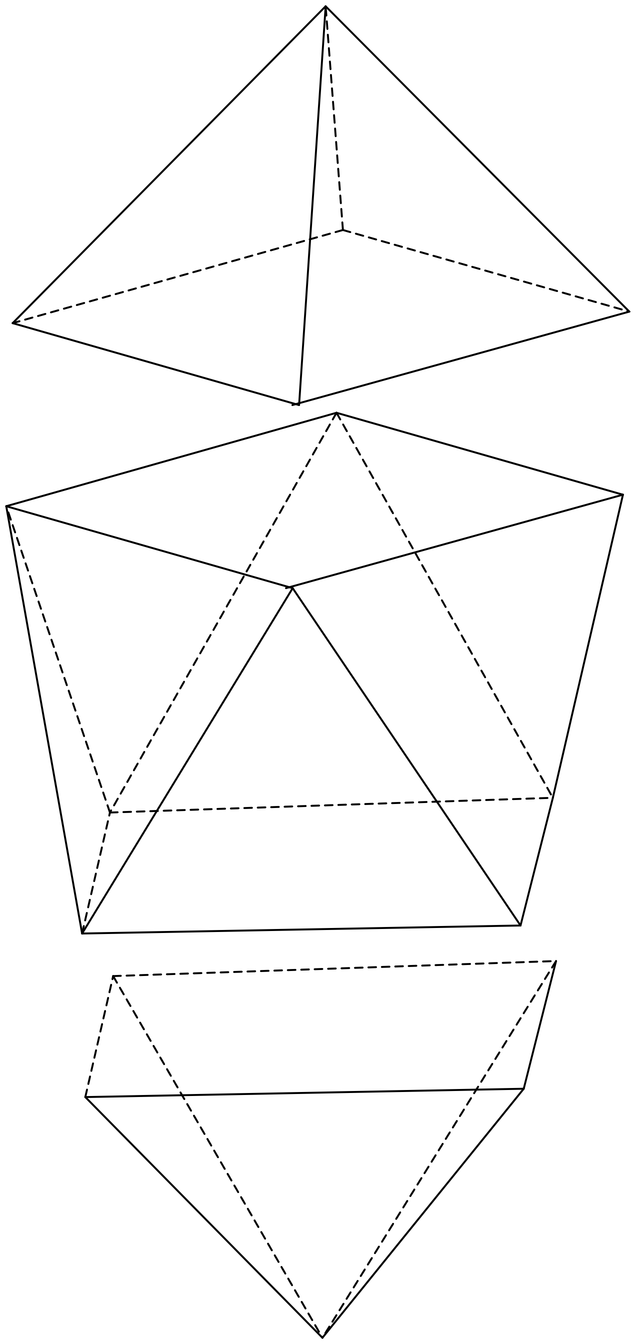
$V = \mathrm{sqrt}(3)/4 \cdot a^3 + \mathrm{sqrt}(2)/2 \cdot a^3$

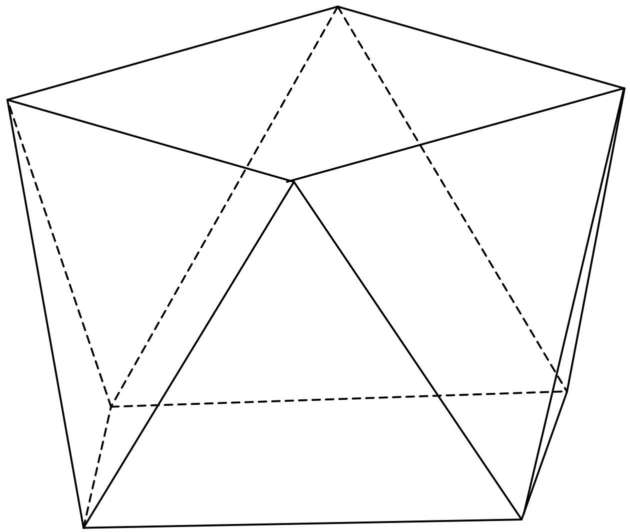
$\boxed{V = (\mathrm{sqrt}(3) + 2\mathrm{sqrt}(2))/4)a^3}$

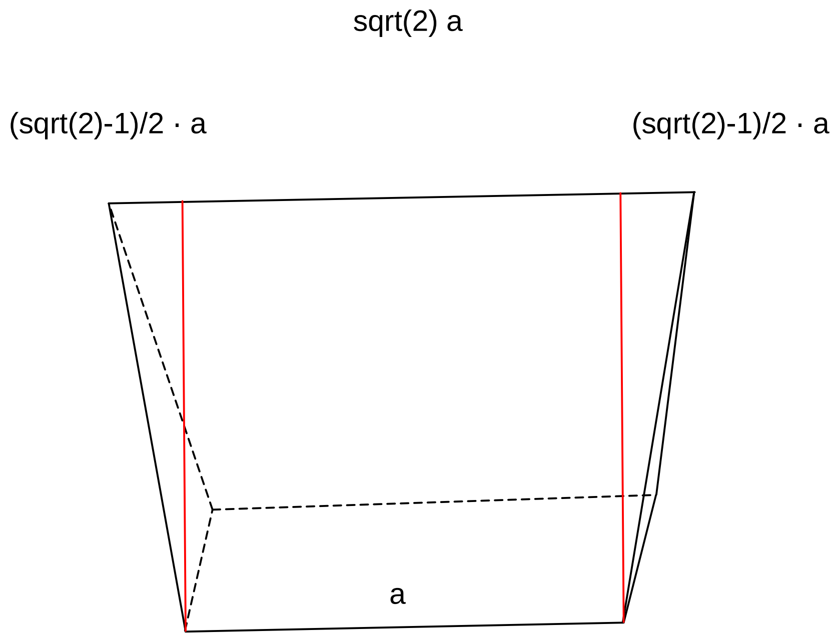


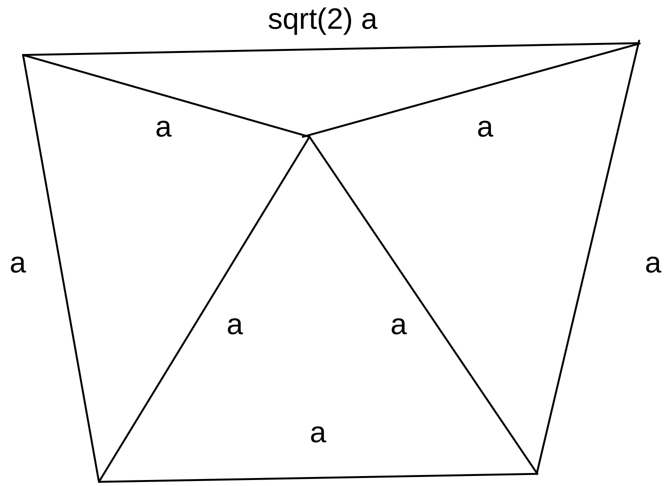
Volumen des 16-Deltaeders







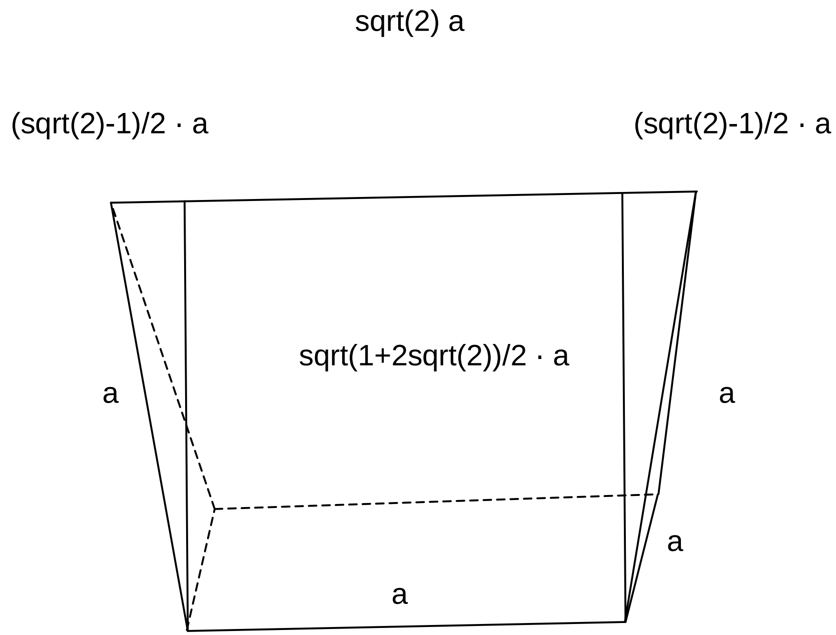

sqrt(2) a
(sqrt(2)-1)/2 · a
(sqrt(2)-1)/2 · a
a


sqrt(2) a
a
a
a
a
a
a
a

$V = V_{\text{Oktaeder}} + V_1 + 2V_2$

Berechnung von V_1 (des Keils) :

$\text{sqrt}\,(a^2 – ((\text{sqrt}(2)-1)/2)^2 \cdot a^2) = \text{sqrt}(1+2\text{sqrt}(2))/2 \cdot a$



$h_a{}^2 = (\text{sqrt}(1+2\text{sqrt}(2))/2 \cdot a)^2 – (a/2)^2$

$h_a{}^2 = ((1+2\text{sqrt}(2))/4 – 1/4) \cdot a^2$

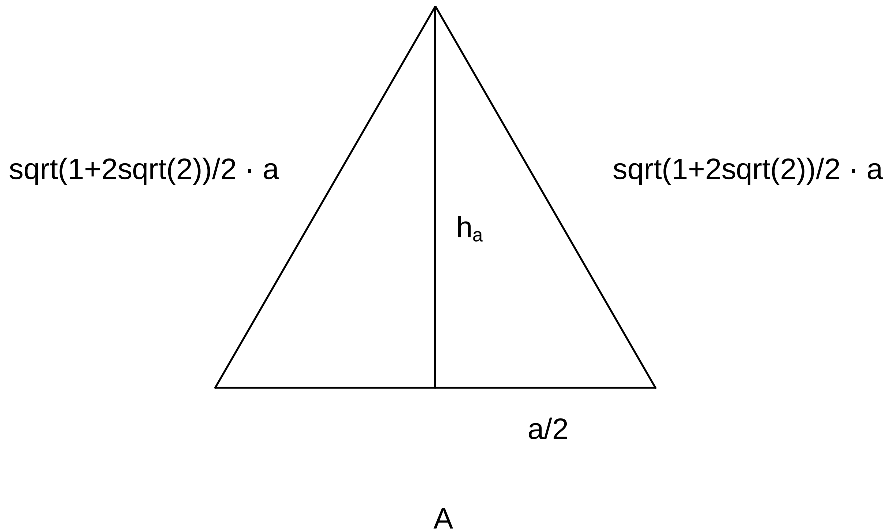
$h_a{}^2 = (\text{sqrt}(2))/2 \cdot a$

$h_a = \text{sqrt}((\text{sqrt}(2))/\text{sqrt}(2) \cdot a$

$h_a = \text{sqrt}(2(\text{sqrt}(2))/2) \cdot a$

$A = 1/2 \cdot a \cdot h_a$

$A = 1/2 \cdot a \cdot \text{sqrt}(2(\text{sqrt}(2))/2 \cdot a$



$A = sqrt(2(sqrt(2))/4 \cdot a^2$

$V_1 = A \cdot a + 2 \cdot 1/3 \cdot A \cdot (sqrt(2)-1)/2 \cdot a$

$V_1 = (1 + 2/3 \cdot (sqrt(2)-1)/2) \cdot A \cdot a$

$V_1 = (1 + 2/3 \cdot (sqrt(2)-1)/2) \cdot A \cdot a$

$V_1 = (2+sqrt(2))/3 \cdot sqrt(2(sqrt(2))/4 \cdot a^2 \cdot a$

$V_1 = (2+sqrt(2))/3 \cdot sqrt(2(sqrt(2))/4 \cdot a^3$

$V_1 =1/12 \cdot sqrt ((2+sqrt(2))^2 \cdot 2(sqrt(2)) \cdot a^3$

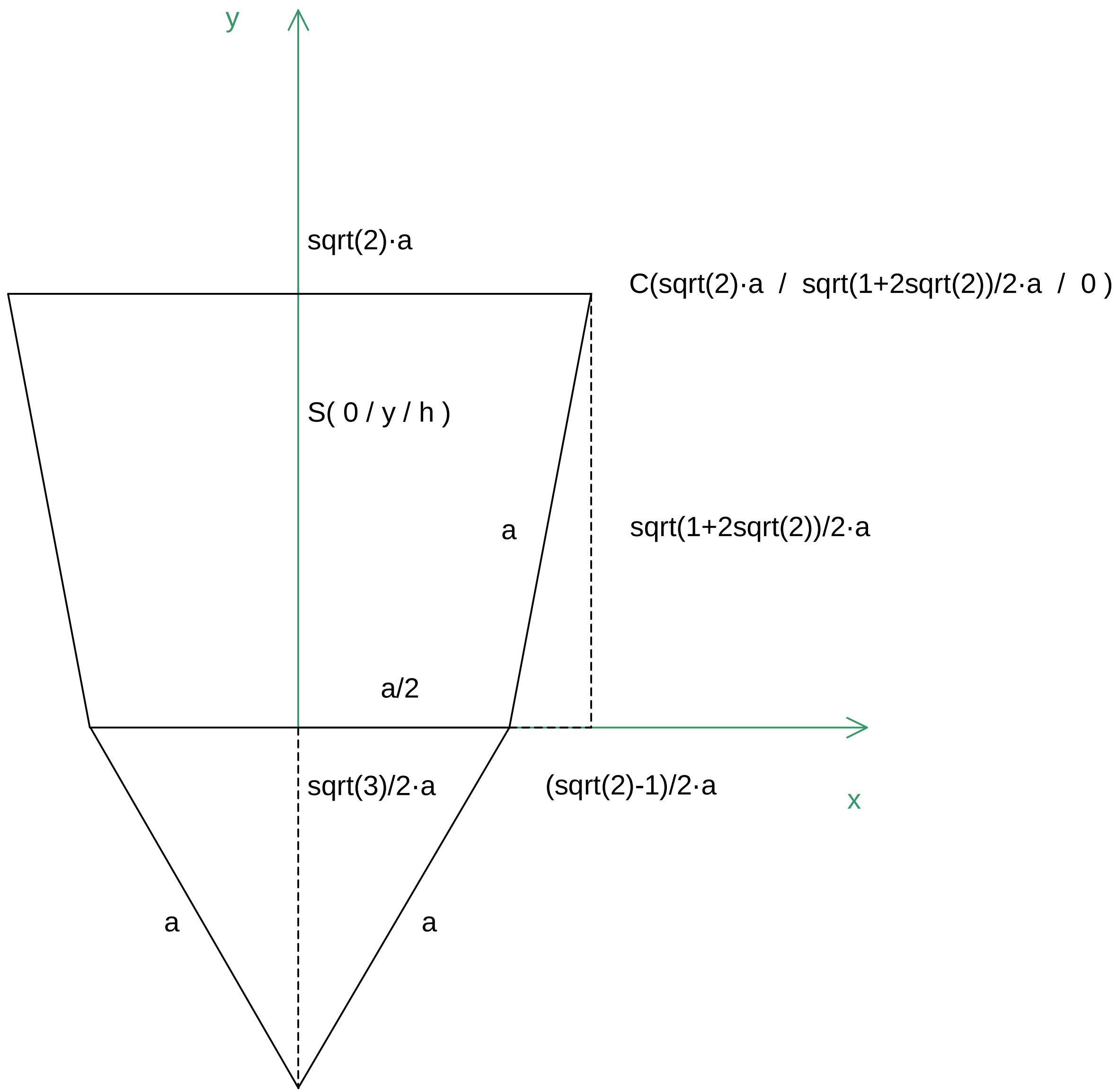
$V_1 =1/12 \cdot sqrt ((6+4sqrt(2)) \cdot 2(sqrt(2)) \cdot a^3$

$V_1 =1/12 \cdot sqrt (16+12sqrt(2)) \cdot a^3$

$V_1 =1/12 \cdot 2 \cdot sqrt (4+3sqrt(2)) \cdot a^3$

$V_1 =1/6 \cdot sqrt (4+3sqrt(2)) \cdot a^3$

Berechnung von V_2 :



$y^2 + h^2 = h_a^2$

$y^2 + h^2 = 3/4 \cdot a^2$

(1) $h^2 = 3/4 \cdot a^2 - y^2$

$ISCI^2 = a^2$

$(sqrt(2)/2\cdot a - 0)^2 + (sqrt(1+2sqrt(2))/2\cdot a - y)^2 + (0-h)^2 = a^2$

(2) $a^2 /2 + (1+2sqrt(2))/4\cdot a^2 - sqrt(1+2sqrt(2))/2\cdot ay + y^2 + h^2 = a^2$

(1) in (2):

$a^2 /2 + (1+ 2sqrt(2))/4\cdot a^2 - 2sqrt(1+2sqrt(2))/2\cdot ay + y^2 + 3/4 \cdot a^2 - y^2 = a^2$

$a^2 /4 + (1+2sqrt(2))/4\cdot a^2 - sqrt(1+2sqrt(2))\cdot ay = 0$

$(2+2sqrt(2))/4\cdot a^2 - sqrt(1+2sqrt(2))\cdot ay = 0$

$(2+2sqrt(2))/4\cdot a^2 = sqrt(1+2sqrt(2))\cdot ay$

$y = (2+2sqrt(2))/(4 sqrt(1+2sqrt(2))) \cdot a$

$y = (1+sqrt(2))/(2 sqrt(1+2sqrt(2))) \cdot a$

y in (1), dann folgt:

$h^2 = 3/4 \cdot a^2 - ((1+sqrt(2))/(2 sqrt(1+2sqrt(2))) \cdot a)^2$

$h^2 = (3/4 - ((3+2sqrt(2))/(4(1+2sqrt(2)))) \cdot a^2$

$h^2 = (3(1+2sqrt(2)) - ((3+2sqrt(2))/(4(1+2sqrt(2)))) \cdot a^2$

$h^2 = (3+6sqrt(2) - 3 - 2sqrt(2))/(4(1+2sqrt(2))) \cdot a^2$

$h^2 = 4sqrt(2))/(4(1+2sqrt(2))) \cdot a^2$

$h^2 = sqrt(2))/(1+2sqrt(2)) \cdot a^2$

$h^2 = sqrt(2)(1-2sqrt(2))/(-7) \cdot a^2$

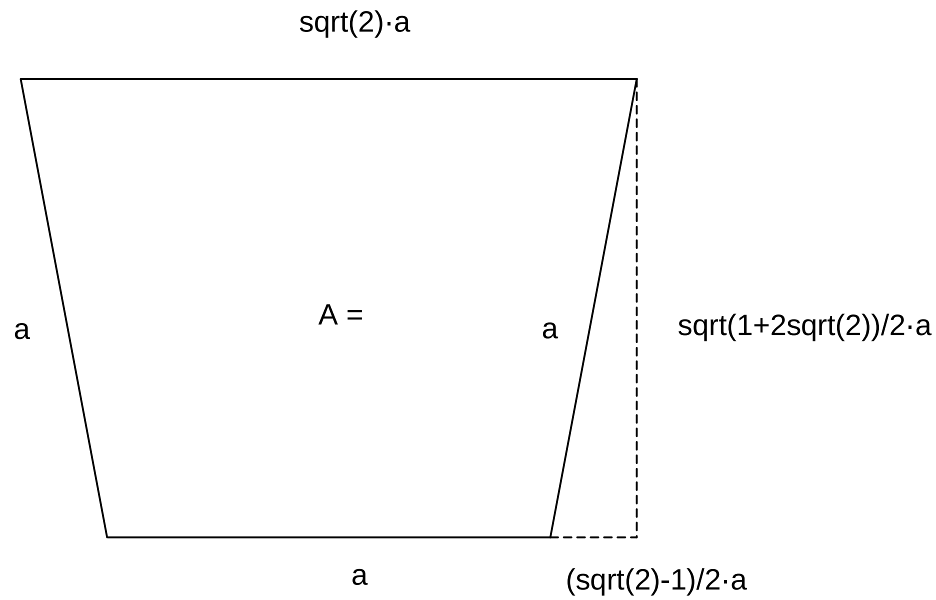
$h^2 = (sqrt(2)-4)/(-7) \cdot a^2$

$h^2 = (4 -sqrt(2))/7 \cdot a^2$

$h^2 = (28 -7sqrt(2))/49 \cdot a^2$

$h = 1/7 \cdot sqrt(28 - 7sqrt(2))\cdot a$

Fläche des Trapezes:



$A = (a + sqrt(2)a)/2 \cdot sqrt(1+2sqrt(2))/2\cdot a$

$A = 1/4\cdot(1 + sqrt(2)) \cdot sqrt(1+2sqrt(2))\cdot a^2$

$A = 1/4\cdot sqrt((1 + sqrt(2))^2 (1+2sqrt(2)))\cdot a^2$

$A = 1/4\cdot sqrt((3 + 2sqrt(2)) (1+2sqrt(2)))\cdot a^2$

$A = 1/4\cdot sqrt(3 + 8sqrt(2) + 8) \cdot a^2$

$A = 1/4\cdot sqrt(11 + 8sqrt(2)) \cdot a^2$

V_2 = 1/3 ·A h

V_2 = 1/3 ·1/4· sqrt(11 + 8sqrt(2)) ·a^2 · 1/7 · sqrt(28 – 7sqrt(2))·a

V_2 = 1/84 · sqrt(11 + 8sqrt(2)) · sqrt(28 - 7sqrt(2)) ·a^3

V_2 = 1/84 · sqrt((11 + 8sqrt(2)) · (28 - 7sqrt(2))) ·a^3

V_2 = 1/84 · sqrt((308 - 77sqrt(2) + 224 sqrt(2) - 112) ·a^3

V_2 = 1/84 · sqrt((196 + 147 sqrt(2)) ·a^3

V_2 = 1/84 · 7 · sqrt((4 + 3 sqrt(2)) ·a^3

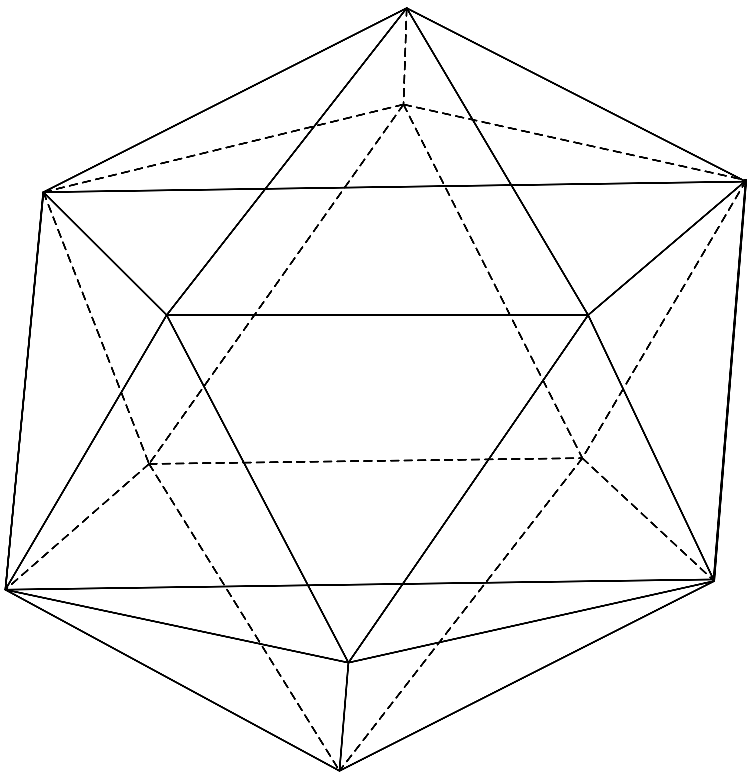
V_2 = 1/12 · sqrt((4 + 3 sqrt(2)) ·a^3

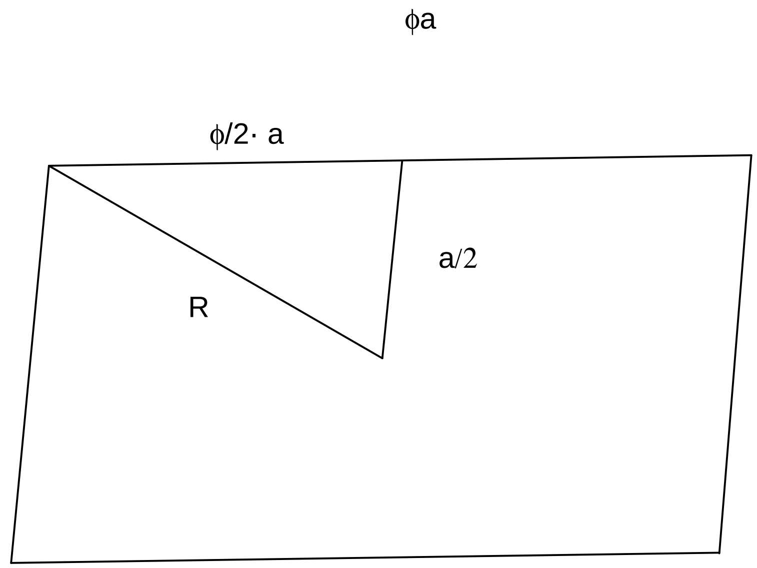
V = $V_{Oktaeder}$ + V_1 + $2V_2$

V = (sqrt(2)/3 + 1/6· sqrt (4+3sqrt(2)) +1/6 · sqrt((4 + 3sqrt(2))) ·a^3

$\boxed{\text{V = (sqrt(2)/3 + 1/3· sqrt (4+3sqrt(2))) · } a^3}$

Volumen des Ikosaeders





R : Umkugelradius
ϕ : Goldene Schnittzahl , $\phi^2 = \phi + 1$, $\phi = (\mathrm{sqrt}(5) + 1)/2$

Es werden folgende Annahmen gemacht: Die Mittelpunkte von Umkreis- und Innkreiskugel sind identisch. Die Innkugel berührt jedes Dreieck des Ikosaeders im Schwerpunkt. Das obige Viereck ist ein Rechteck, etc.

$R^2 = (\phi a/2)^2 + (a/2)^2$

$R^2 = (\phi^2 + 1)/4 \cdot a^2$

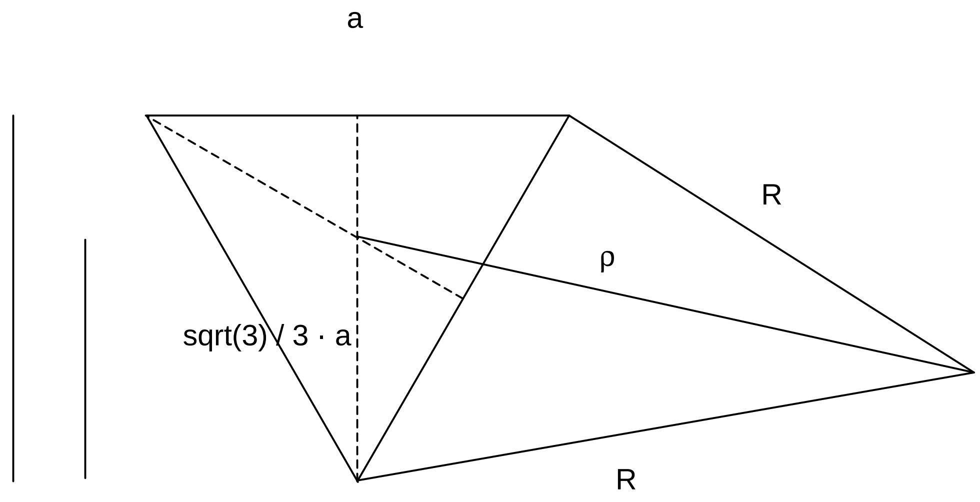
$R^2 = (\phi + 2)/4 \cdot a^2$

$R^2 = ((\mathrm{sqrt}(5) + 1)/2 + 2)/4 \cdot a^2$

$R^2 = (\mathrm{sqrt}(5) + 5)/8 \cdot a^2$

$R^2 = (2\mathrm{sqrt}(5) + 10)/16 \cdot a^2$

$R = \mathrm{sqrt}(2\mathrm{sqrt}(5) + 10)/4 \cdot a^2$



$h_a = \mathrm{sqrt}(3) / 2 \cdot a$ $\quad$ $2/3 \cdot \mathrm{sqrt}(3) / 2 = \mathrm{sqrt}(3) / 3 \cdot a$

ρ : Inkugelradius

$\rho^2 = R^2 - (\mathrm{sqrt}(3)/3 \cdot a)^2$

ρ^2 = (2sqrt(5) +10)/16 ·a^2 - (sqrt(3)/3 · a $)^2$

ρ^2 = ((2sqrt(5) +10)/16 - 1/3)·a^2

ρ^2 = ((6sqrt(5) +3)/48 - 16/48)·a^2

ρ^2 = (6sqrt(5) +14)/48 ·a^2

ρ^2 = (3sqrt(5) +7)/24 ·a^2

ρ^2 = (18sqrt(5) +42)/144 ·a^2

ρ = sqrt(18sqrt(5) +42)/12 ·a

ρ = sqrt(3)sqrt(6sqrt(5) +14)/12 ·a

ρ = sqrt(3)(sqrt(5) +3)/12 ·a

V = 20 · 1/3 · A · ρ

V = 20 · 1/3 · sqrt(3)/4 · a^2 · sqrt(3)(sqrt(5) +3)/12 ·a

$\boxed{V = 5(\text{sqrt}(5) +3)/12 \cdot a^3}$