Teilverhältnis und Länge zweier Eck-Seiten-Transversalen im allgemeinen Dreieck

Arno Fehringer August 2007

Bekanntlich kann man das Teilverhältnis (2/3 : 1/3) zweier Seitenhalbierenden eines allgemeinen Dreiecks mittels der Strahlensätze bestimmen. Was meistens fehlt, ist die Berechnung der Länge der Seitenhalbierenden.
Im folgenden soll die entsprechende Fragestellung für beliebige Eck-Seiten-Transversalen eines allgemeinen Dreiecks betrachtet werden und die Ergebnisse im folgenden Satz formuliert werden:

Satz:

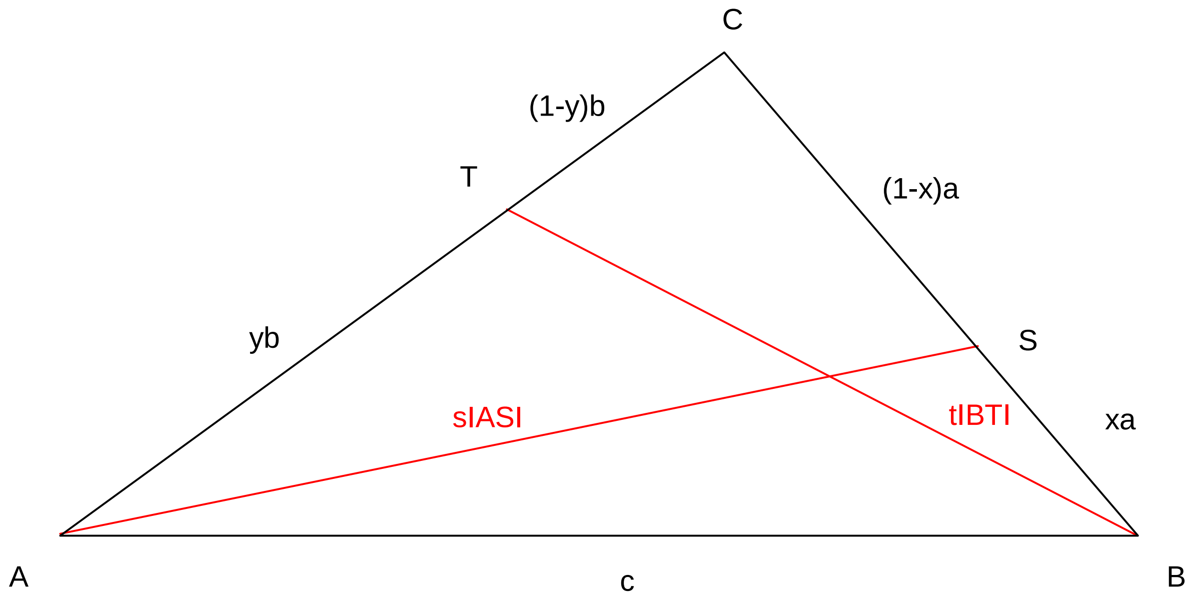
Seien AS und BT zwei Eck-Seiten-Transversalen eines Dreiecks ABC, welche die Seiten a, b im Verhältnis x:(1-x) und y:(1-y) mit 0<x,y<1 teilen, so teilen sich die Eck-Seiten-Transversalen im Verhältnis s:(1-s) und t:(1-t) mit

$$s = \frac{y}{x + y - xy} \quad \text{bzw.} \quad t = \frac{x}{x + y - xy}$$

$$\frac{s}{1-s} = \frac{1}{x} \cdot \frac{y}{(1-y)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{t}{1-t} = \frac{1}{y} \cdot \frac{x}{(1-x)}$$

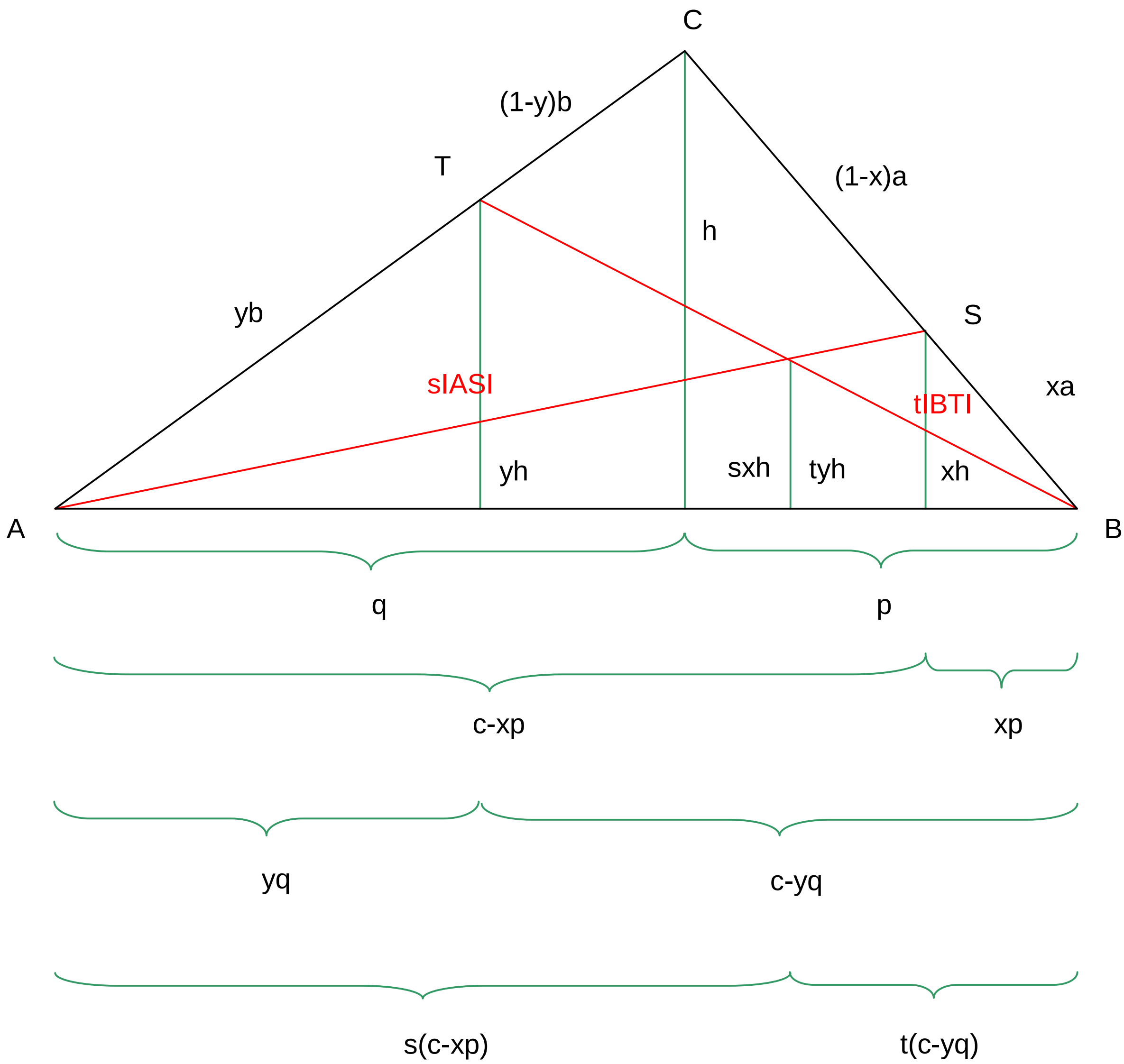
Die Längen der Eck-Seiten-Transversalen sind

IASI = sqrt ($a^2 x^2$ + (b^2 - c^2 - a^2)x + c^2) bzw. IBTI = sqrt ($b^2 y^2$ + (a^2 - c^2 - b^2)y + c^2)



Beweis:

1. Fall: Dreieck ABC ist spitzwinklig
Aufgrund des 2. Strahlensatzes gelten folgende Beziehungen:



(0) $p + q = c$

(1) $sxh = tyh \quad \Rightarrow \quad sx = ty \quad \Rightarrow \quad t = sx/y$

(2) $t(c - yq) + s(c - xp) = c$

(1) in (2) :

$sx/y\ (c - yq) + s(c - xp) = c \qquad | \cdot y$

$s\ (cx - xyq) + s(cy - xyp) = cy$

$s\ (cx - xyq + cy - xyp) = cy$

$s\,(cx + cy - xy(p+q)) = cy$

$s\,(cx + cy - xyc) = cy$ I:c

$s\,(x + y - xy) = y$

$$s = \frac{y}{x + y - xy}$$

s in (1) :

$$t = \frac{x}{x + y - xy}$$

(3) $IASI^2 = (xh)^2 + (c\text{-}xp)^2$

$IASI^2 = x^2\,h^2 + c^2 - 2cxp + x^2p^2$

$IASI^2 = x^2(\,h^2 + p^2) + c^2 - 2cxp$

(3’) $IASI^2 = x^2a^2 + c^2 - 2cxp$

Nach den **Fehringerschen Gleichungen (+)** ist $p = (a^2 + c^2 - b^2)/2c$, also $-2cp = b^2 - c^2 - a^2$.
Nach einsetzen in (3’) erhält man:

$IASI^2 = a^2\,x^2 + (b^2 - c^2 - a^2)x + c^2$

Analog erhält man:

$IBTI^2 = b^2\,y^2 + (a^2 - c^2 - b^2)y + c^2$

<u>2. Fall:</u> Dreieck ABC ist stumpfwinklig (<ABC > 90°)
In diesem Fall erhält man die gleichen Formeln, wenn man berücksichtigt, dass
$p = (a^2 + c^2 - b^2)/2c < 0$ ist.

---- + ----

(+)

Die **Fehringerschen Gleichungen** für p,q,h des allgemeinen Dreiecks lauten:

$p = (a^2 + c^2 - b^2)/2c$

$q = (b^2 + c^2 - a^2)/2c$

$h = \text{sqrt}(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) / 2c$

$h = \text{sqrt}((a^2 + b^2 - c^2)/2 + pq)$

Referenzen:

Fehringer, Arno : Erweiterung der Euklidischen Flächensätze auf das allgemeine Dreieck und die Fehringerschen Gleichungen nebst Anwendung zur Volumenbestimmung des allgemeinen Tetraeders, Juni 2007