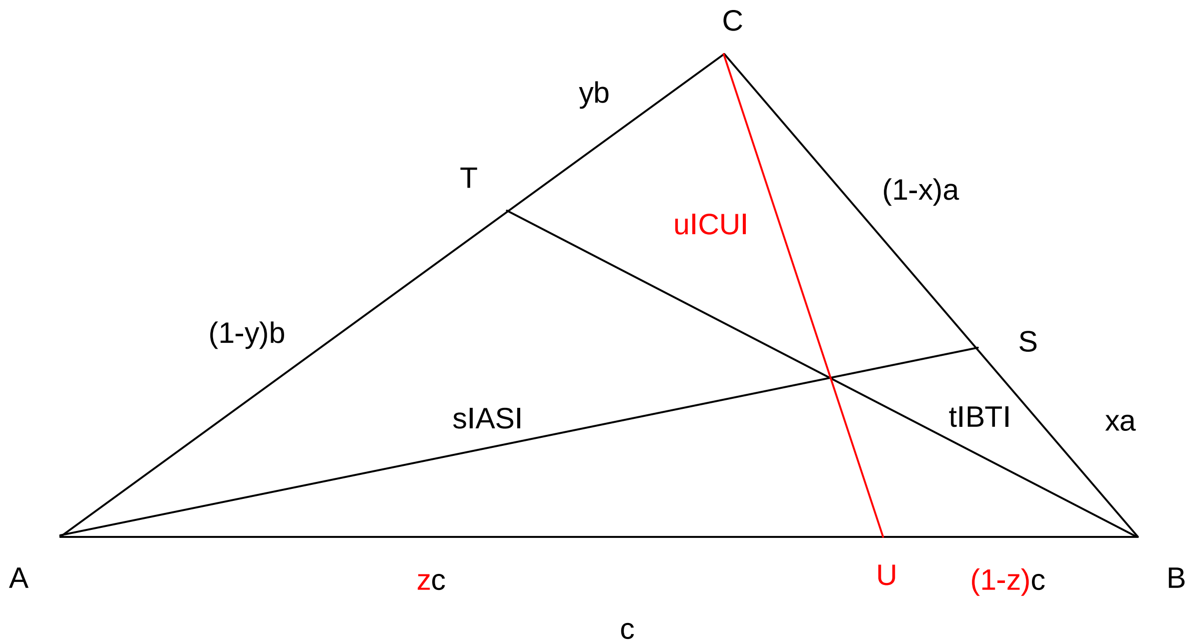
Koinzidenz der Eck-Seiten-Transversalen im allgemeinen Dreieck

Arno Fehringer Februar 2008

Gegeben seien ein Dreieck ABC und die beiden Eck-Seiten-Transversalen AS und BT, welche die Seiten a, b im Verhältnis x:(1-x) und y:(1-y) mit 0<x,y<1 teilen. Dann teilen sich die Eck-Seiten-Transversalen im Verhältnis s:(1-s) und t:(1-t) mit

$$s = \frac{1-y}{1-y+x-(1-y)x} \qquad \text{bzw.} \qquad t = \frac{x}{x+1-y-x(1-y)}$$



Geht nun eine dritte Eck-Seiten-Transversale durch den Schnittpunkt der ersten beiden, so teilt dies die Seite c im Verhältnis z:(1-z)

Nun gilt aber auch

$$s = \frac{z}{z+1-x-z(1-x)}$$

Gleichsetzung der beiden Gleichungen für s liefert z in Abhängigkeit von x und y:

$$\frac{1-y}{1-y+x-(1-y)x}=\frac{z}{z+1-x-z(1-x)}$$

$$\frac{1-y}{1-y+xy}=\frac{z}{1-x+xz}$$

$$(1-y)(1-x+xz)=(1-y+xy)z$$

$$(1-y)(1-x)+(1-y)xz)=(1-y+xy)z$$

$$(1-y)(1-x)=(1-y+xy)z-(1-y)xz)$$

$$(1-y)(1-x)=[1-y+xy-(1-y)x]z$$

$$(1-y)(1-x)=[(1-y)(1-x)+xy]z$$

$$z=\frac{(1-y)(1-x)}{(1-y)(1-x)+xy}$$

$$z=\frac{1}{1+\frac{x}{1-x}\frac{y}{1-y}}$$

Bringt man nun noch das Verhältnis z:(1-z) herein, so erhält man:

$$z=\frac{1}{1+\frac{x}{(1-x)}\frac{y}{(1-y)}}$$

$$1-z=1-\frac{1}{1+\frac{x}{(1-x)}\frac{y}{(1-y)}}$$

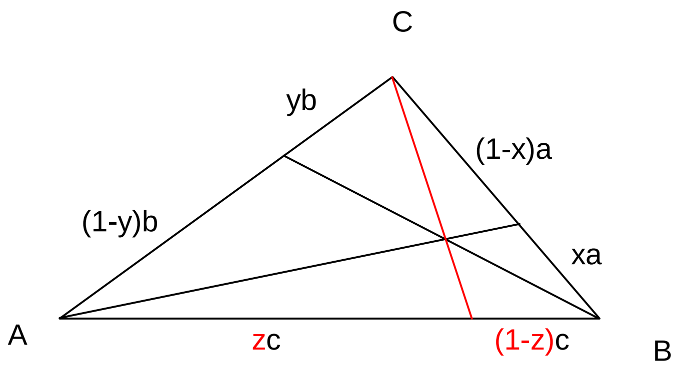
$$1-z=\frac{\frac{x}{(1-x)}\frac{y}{(1-y)}}{1+\frac{x}{(1-x)}\frac{y}{(1-y)}}$$

$$\frac{z}{(1-z)}=\frac{1}{\frac{x}{(1-x)}\frac{y}{(1-y)}}$$

Die Bedingung, dass sich die drei Eck-Seiten-Transversalen in einem Punkt scheiden ergibt sich zu:

$$\boxed{\frac{x}{(1-x)}\frac{y}{(1-y)}\frac{z}{(1-z)}=1}$$

Dies ist auch bekannt als der **Satz von Ceva**.



Referenzen:

Fehringer, Arno : Teilverhältnis und Länge zweier Eck-Seiten-Transversalen im allgemeinen Dreieck, August 2007