Teilverhältnis der Höhen im allgemeinen Dreieck

Arno Fehringer September 2007

Die in einer zurückliegenden Arbeit gewonnenen Erkenntnisse über Eck-Seiten-Transversalen im allgemeinen Dreieck (vgl. **[2]**) konnten im folgenden Satz zusammengefasst werden :

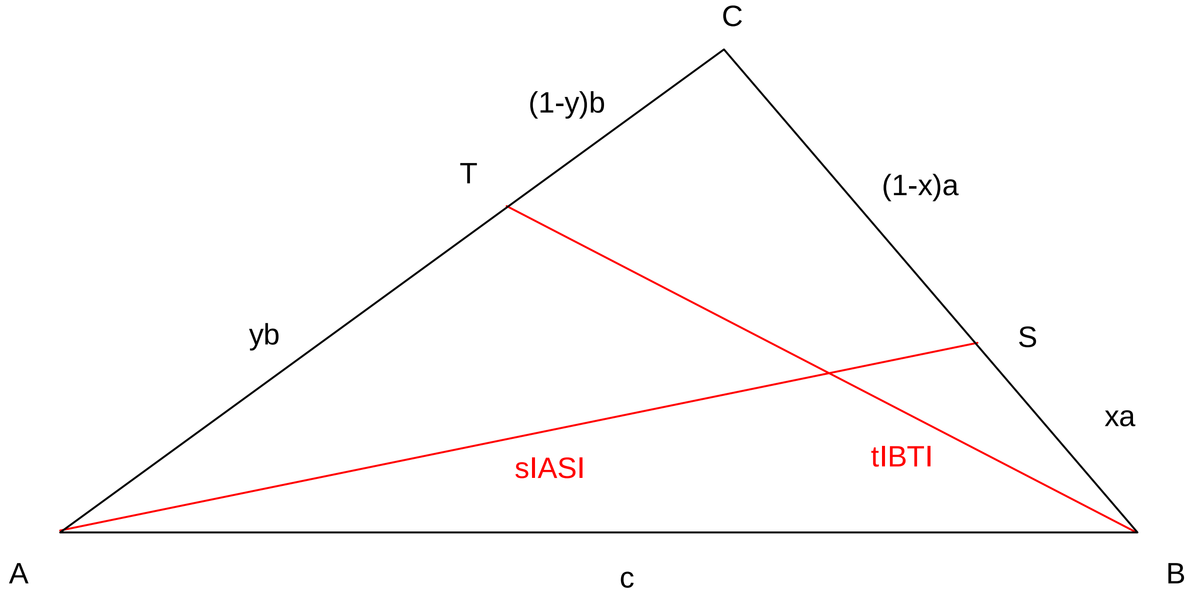
Satz:
Sind AS und BT zwei Eck-Seiten-Transversalen eines Dreiecks ABC, welche die Seiten a, b im Verhältnis x:(1-x) und y:(1-y) mit 0<x,y<1 teilen, so teilen sich die Eck-Seiten-Transversalen im Verhältnis s:(1-s) und t:(1-t) mit

$$s = \frac{y}{x+y-xy} \qquad \text{bzw.} \qquad t = \frac{x}{x+y-xy} \; .$$

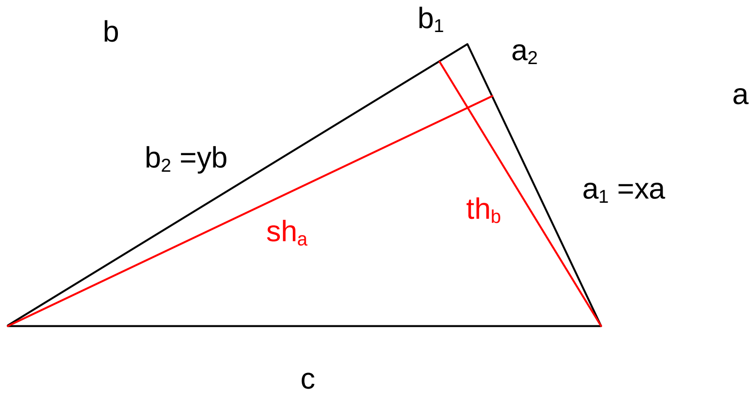
$$\frac{s}{1-s} = \frac{1}{x} \cdot \frac{y}{(1-y)} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{t}{1-t} = \frac{1}{y} \cdot \frac{x}{(1-x)}$$

Die Längen der Eck-Seiten-Transversalen sind

$$IASI = \sqrt{a^2\, x^2 \;+\; (b^2 - c^2 - a^2)x + c^2} \qquad \text{bzw.} \qquad IBTI = \sqrt{b^2\, y^2 \;+\; (a^2 - c^2 - b^2)y + c^2}$$



In der vorliegenden Arbeit sollen nun mittels dieses Satzes Länge und Teilverhältnis der Höhen im allgemeinen Dreieck bestimmt werden. Betrachten wir hierzu etwa die Höhen h_a und h_b eines Dreiecks mit den Seiten a, b, c.



Die Frage nach der Länge der Höhen ist aufgrund der **Fehringerschen Gleichungen** (vgl. **(+)**, **[1]**) leicht zu beantworten:

$$h_a = \frac{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}}{2a} \qquad h_b = \frac{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}}{2b}$$

Die Höhen h_a und h_b teilen die Seiten a bzw. b in zwei Abschnitte a_1 und a_2 bzw. b_1 und b_2

$a_1 = (c^2+a^2-b^2) / (2a)$ $\qquad$ $b_1 = (a^2+b^2-c^2) / (2b)$
$a_2 = (b^2+a^2-c^2) / (2a)$ $\qquad$ $b_2 = (c^2+b^2-a^2) / (2b)$

Daraus ergeben sich die Teilungszahlen x für a und y für b zu:

$x = a_1/a = (c^2+a^2-b^2) / (2a^2)$ $\quad$ $y = b_2/b = (c^2+b^2-a^2) / (2b^2)$ $\qquad$ mit $\quad 0< x,y <1$

Weiter erhält man die Teilungszahlen s und t, mit $0< s, t <1$, :

$$s = \frac{y}{x+y-xy} = \frac{2a^2(b^2+c^2-a^2)}{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4} \qquad t = \frac{x}{x+y-xy} = \frac{2b^2(a^2+c^2-b^2)}{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}$$

Die Teilstrecken sh_a und th_b sind:

$$sh_a = \frac{a(b^2+c^2-a^2)}{\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}} \qquad th_b = \frac{b(a^2+c^2-b^2)}{\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}}$$

---- + ----

(+)

Die **Fehringerschen Gleichungen** des allgemeinen Dreiecks lauten:

$p = (a^2 + c^2 - b^2)/2c$

$q = (b^2 + c^2 - a^2)/2c$

$h = \mathrm{sqrt}(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) / 2c$

$h = \mathrm{sqrt}((a^2 + b^2 - c^2)/2 + pq)$

Hierin bedeuten: a,b,c :Dreieckseiten; h: Höhe auf c ; p,q: durch h erzeugte Zerlegung von c

Referenzen bzw. unveröffentlichte Manuskripte:

[1] Fehringer, Arno : Erweiterung der Euklidischen Flächensätze auf das allgemeine Dreieck und die Fehringerschen Gleichungen nebst Anwendung zur Volumenbestimmung des allgemeinen Tetraeders, Juni 2007

[2] Fehringer, Arno : Teilverhältnis und Länge zweier Eck-Seiten-Transversalen im allgemeinen Dreieck, August 2007