# Teilverhältnis der Winkelhalbierenden im allgemeinen Dreieck

Arno Fehringer September 2007

Die in einer zurückliegenden Arbeit gewonnenen Erkenntnisse über Eck-Seiten-Transversalen im allgemeinen Dreieck ( vgl. **[2]** ) konnten im folgenden Satz zusammengefasst werden :

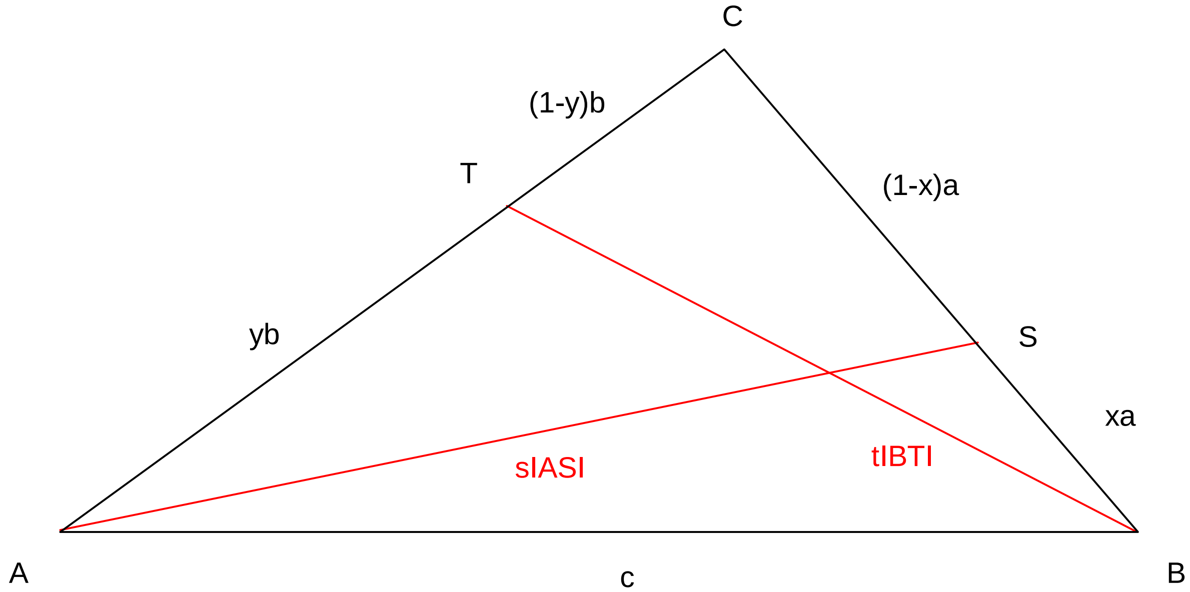
**Satz:**
Sind AS und BT zwei Eck-Seiten-Transversalen eines Dreiecks ABC, welche die Seiten a, b im Verhältnis x:(1-x) und y:(1-y) mit 0<x,y<1 teilen, so teilen sich die Eck-Seiten-Transversalen im Verhältnis s:(1-s) und t:(1-t) mit

$$s = \frac{y}{x + y - xy} \quad \text{bzw.} \quad t = \frac{x}{x + y - xy} \; .$$

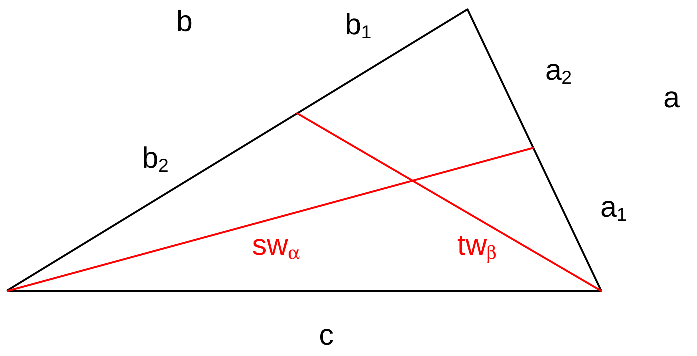
$$\frac{s}{1-s} = \frac{1}{x} \cdot \frac{y}{(1-y)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{t}{1-t} = \frac{1}{y} \cdot \frac{x}{(1-x)}$$

Die Längen der Eck-Seiten-Transversalen sind

$$|AS| = \sqrt{a^2\,x^2 \; + \; (b^2 - c^2 \; - a^2)x + c^2} \quad \text{bzw.} \quad |BT| = \sqrt{b^2\,y^2 \; + \; (a^2 - c^2 \; - b^2)y + c^2}$$




In der vorliegenden Arbeit sollen nun mittels dieses Satzes Länge und Teilverhältnis der Winkelhalbierenden im allgemeinen Dreieck bestimmt werden. Betrachten wir hierzu etwa die Winkelhalbierenden $w_\alpha$ und $w_\beta$ eines Dreiecks mit den Seiten a, b, c.




Bekanntlich teilen die Winkelhalbieren die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten ( vgl. **[1]** bzw. Anmerkung unten ).

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_1}{a} = \frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{1}{1 + \frac{a_2}{a_1}} = \frac{1}{1 + \frac{b}{c}} = \frac{c}{b + c}$$

$$\Rightarrow \quad x := \frac{c}{b + c}$$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{a}{c}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b_2}{b} = \frac{b_2}{b_1 + b_2} = \frac{1}{\frac{b_1}{b_2} + 1} = \frac{1}{1 + \frac{a}{c}} = \frac{c}{a + c}$$

$$\Rightarrow \quad y := \frac{c}{a + c}$$

Daraus ergeben sich die Längen der Winkelhalbierenden $w_\alpha$ , $w_\beta$ und die Teilungen s, t zu

$$w_\alpha = \sqrt{a^2x^2 + (b^2 - c^2 - a^2)x + c^2}$$

$$\boxed{w_\alpha = \frac{1}{b + c}\sqrt{bc((b + c)^2 - a^2)}}$$

$$w_\beta = \sqrt{b^2y^2 + (a^2 - c^2 - b^2)y + c^2}$$

$$\boxed{w_\beta = \frac{1}{a + c}\sqrt{ac((a + c)^2 - b^2)}}$$

$$\frac{s}{1 - s} = \frac{1}{x} \cdot \frac{y}{1 - y}$$

$$\boxed{\frac{s}{1 - s} = \frac{b + c}{a}}$$

$$\boxed{s = \frac{b + c}{a + b + c}}$$

$$\boxed{1 - s = \frac{a}{a + b + c}}$$

$$\frac{t}{1 - t} = \frac{1}{y} \cdot \frac{x}{1 - x}$$

$$\boxed{\frac{t}{1 - t} = \frac{a + c}{b}}$$

$$\boxed{t = \frac{a + c}{a + b + c}}$$

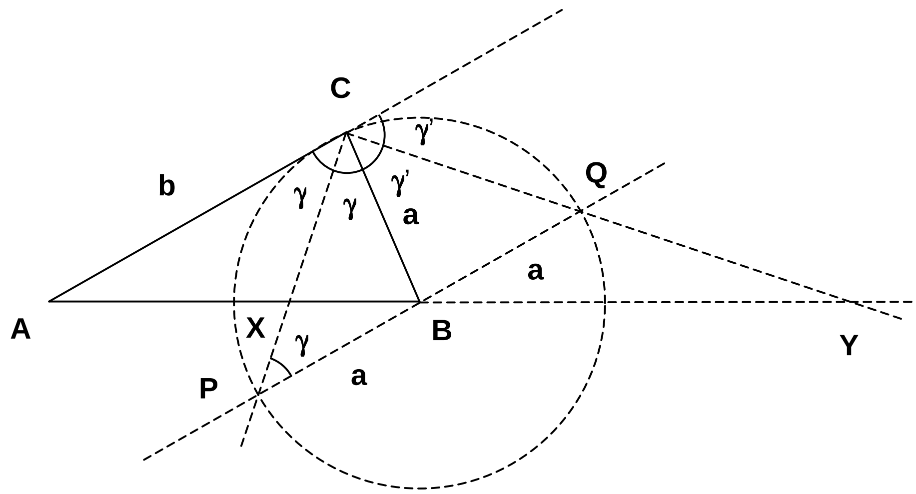
$$\boxed{1 - t = \frac{b}{a + b + c}}$$

---- + ----

Anmerkung:

---

Satz über die Winkelhalbierenden:
In einem Dreieck teilen die Winkelhalbierenden eines Innenwinkels und des zugehörigen Außenwinkels die Gegenseite <u>harmonisch</u> im Verhältnis der anliegenden Seiten.




Beweis:
Dreieck $\Delta$ ABC mit den Seiten IBCI=a und IACI=b.

1. Parallele g durch B zu AC
2. $K_{B,a} \cap g = \{P,Q\}$
3. $CP \cap AB=\{X\}$, $CQ \cap AB=\{Y\}$

Aufgrund des 2. Strahlensatzes folgt: $\frac{XA}{XB}=\frac{b}{a}$ und $\frac{YA}{YB}=\frac{b}{a}$ . Also gilt $\frac{XA}{XB}=\frac{YA}{YB}$, und die Punkte AXBY sind harmonische Teilungspunkte.

Aufgrund der Winkelsätze folgt, dass die Geraden CP und CQ die Winkelhalbierenden des Innen- und Außenwinkels bei C sind. Außerdem stehen die Winkelhalbierenden senkrecht aufeinander.

---

Referenzen bzw. unveröffentlichte Manuskripte:

**[1] Fehringer, Arno** : Grundlegendes zur Geometrie, 2003

**[2] Fehringer, Arno** : Teilverhältnis und Länge zweier Eck-Seiten-Transversalen im allgemeinen Dreieck, August 2007