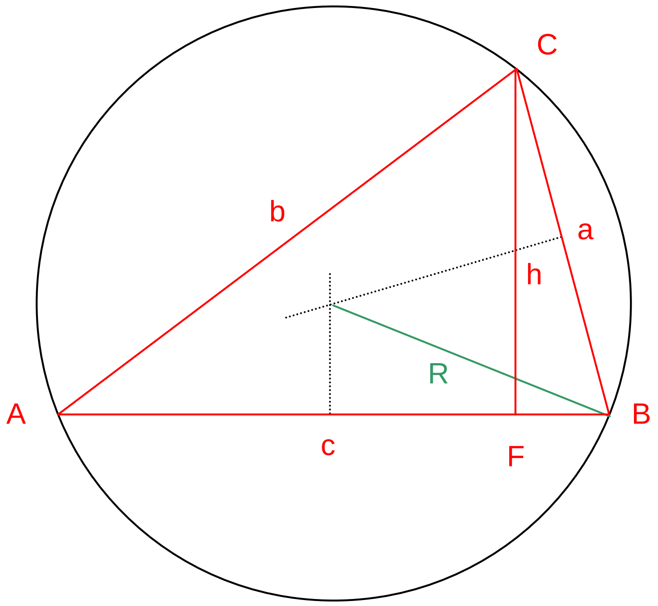
Um- und Inkreisradien in Abhängigkeit der Seitenlängen im allgemeinen Dreieck

Arno Fehringer September 2007

In den Lehrbüchern zur Geometrie beschränkt sich die Thematik des In- und Umkreis von allgemeinen Dreiecken meist auf den Existenzbeweis des Inn- und Umkreismittelpunktes bzw. auf die entsprechende Konstruktion. Die algebraische Beschreibung der Radien kommt so gut wie nicht vor.

Betrachtungen zum Umkreis:

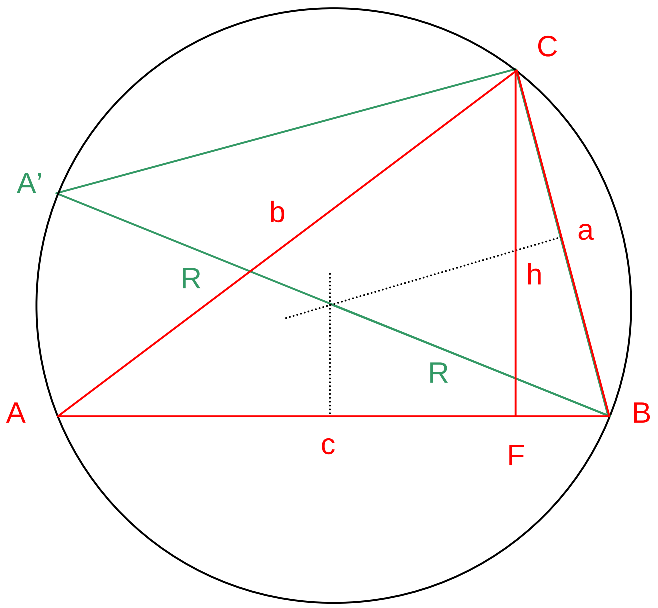
Die folgende elegante Herleitung einer Formel mittels Umfangswinkelsatz und Ähnlichkeitsbetrachtung zur Bestimmung des Umkreisradius R eines Dreiecks verdanke ich meinem Kollegen **Hugo Wehrle [2]**. Wir denken uns ein Dreieck mit den kanonischen Seitenbezeichnungen a, b, c , der Höhe h auf c und dem Fußpunkt F. Der Umkreismittelpunkt ist Schnittpunkt von irgend zwei Seitenmittensenkrechten, etwa der Seitenmittensenkrechten von a und c.



Nach den **<u>Fehringerschen Gleichungen</u> (+)** kann man die Höhe h auf c in Abhängigkeit von a,b,c darstellen:

$$h = \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4} \,/\, 2c$$

Das Dreieck AFC ist rechtwinklig. Um R in Abhängigkeit von a,b,c darzustellen betrachtet man ein rechtwinkliges Dreieck A'CB, das nach dem Umfangswinkelsatz mit dem Dreieck AFC einen weiteren Winkel gemeinsam hat, nämlich den Winkel bei A'. Daraus folgt, dass die Dreiecke AFC und A'CB ähnlich sind,



so dass folgende Verhältnisgleichung gilt:

$$\frac{h}{b} = \frac{a}{2R}$$

Nach Umformung und Einsetzung des Terms für h ergibt sich:

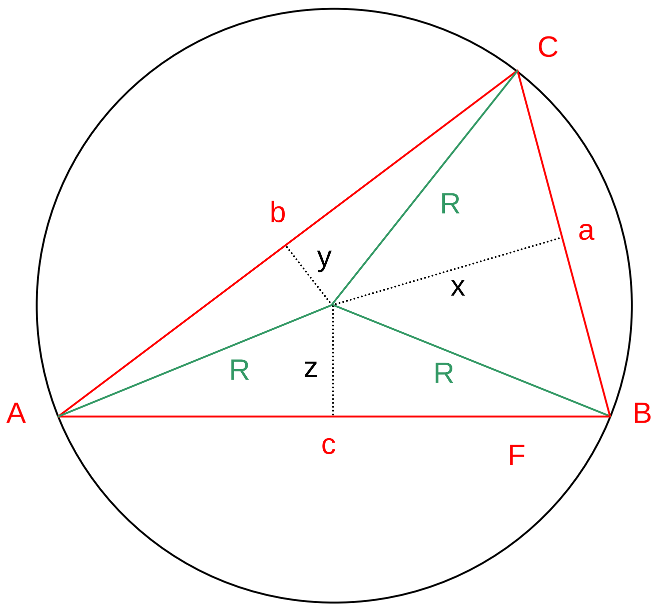
$$R = \frac{ab}{2h}$$

$$R = \frac{ab}{2\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}\,/\,2c}$$

$$\boxed{R = \frac{abc}{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}}$$

Die Abstände des Umkreismittelpunktes x,y,z von den Seiten a,b,c ergeben sich nach dem Satz des Pythagoras zu:

$$x = \frac{a\left|b^2+c^2-a^2\right|}{2\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}}$$
$$y = \frac{b\left|a^2+c^2-b^2\right|}{2\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}}$$
$$z = \frac{c\left|a^2+b^2-c^2\right|}{2\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}}$$

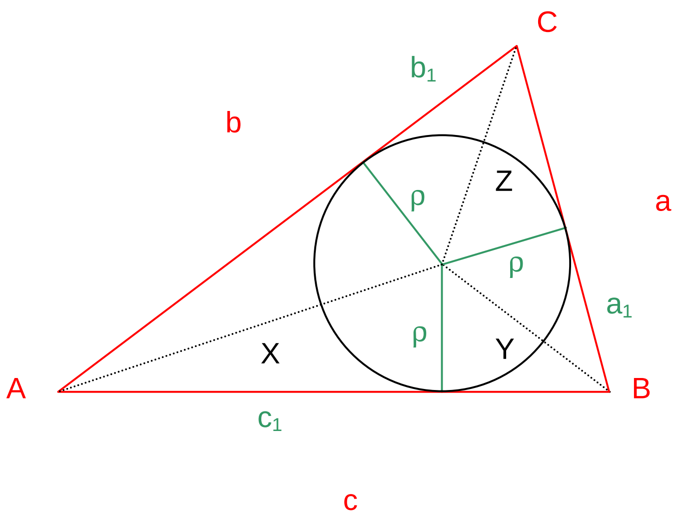


Bemerkung:
Ein anderer naheliegender Ansatz zur Bestimmung von R über den Satz des Pythagoras und Flächensummierung liefert nicht das Gewünschte, da das entsprechende Gleichungssystem einer elementaren Lösung zu trotzen scheint.

$$x^2+\frac{a^2}{4}=R^2$$
$$y^2+\frac{b^2}{4}=R^2$$
$$z^2+\frac{c^2}{4}=R^2$$
$$\frac{ax}{2}+\frac{by}{2}+\frac{cz}{2}=\frac{\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}}{4}$$

Betrachtungen zum Inkreis:

Der Inkreismittelpunkt ergibt sich als Schnittpunkt irgend zweier bzw. der drei Innenwinkelhalbierenden. Verbindet man den Mittelpunkt mit den Dreiecksecken, erhält man eine Zerlegung des Dreiecks in drei Dreiecke mit dem Inkreisradius ρ als Höhe.



Nun hat man zwei Möglichkeiten für die Flächenberechung des Dreiecks:

$$A = \frac{a\rho}{2} + \frac{b\rho}{2} + \frac{c\rho}{2} \qquad \text{und} \qquad A = \frac{ch}{2} = \frac{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{4}$$

Gleichsetzung und Umformung nach ρ liefert:

$$\boxed{\rho = \frac{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{2(a+b+c)}}$$

Die Teilungen a_1, b_1, c_1 der Dreieckseiten durch die Berührradien des Inkreises erhält man Summation und Symmetriebetrachtungen und zyklische Vertauschungen:

$$a_1$$

$$\Rightarrow \quad b_1 = a - a_1$$
$$\Rightarrow \quad c_1 = b - (a - a_1)$$

$$a_1 = c - c_1$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = c - (b - (a - a_1))$$
$$\Rightarrow \quad a_1 = c - b + a - a1$$
$$\Rightarrow \quad a_1 = \frac{a - b + c}{2}$$

$$a_1 = \frac{a-b+c}{2} \qquad b_1 = \frac{a+b-c}{2} \qquad c_1 = \frac{-a+b+c}{2}$$

Die Entfernungen X, Y, Z des Inkreismittelpunktes von den Dreiecksecken erhält man mittels des Satzes von Pythagoras und zyklischer Vertauschung:

$$X = \sqrt{\frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{4(a+b+c)^2}+\frac{(-a+b+c)^2}{4}}$$

$$X = \sqrt{\frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4+(-a+b+c)^2(a+b+c)^2}{4(a+b+c)^2}}$$

$$X = \sqrt{\frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4+(a^2+b^2+c^2+2bc-2(ab+ac))(a^2+b^2+c^2+2bc+2(ab+ac))}{4(a+b+c)^2}}$$

$$X = \sqrt{\frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4+(a^2+b^2+c^2+2bc)^2-4a^2b^2-8a^2bc-4a^2c^2}{4(a+b+c)^2}}$$

$$X = \sqrt{\frac{-2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2+4b^2c^2+2a^2b^2+2a^2c^2+4a^2bc+2b^2c^2+4b^3c+4bc^3-8a^2bc}{4(a+b+c)^2}}$$

$$X = \sqrt{\frac{4b^2c^2+4b^2c^2-4a^2bc+4b^3c+4bc^3}{4(a+b+c)^2}}$$

$$X = \sqrt{\frac{b^2c^2+b^2c^2-a^2bc+b^3c+bc^3}{(a+b+c)^2}}$$

$$X = \sqrt{\frac{bc(bc+bc-a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}}$$

$$X = \sqrt{\frac{bc(-a+b+c)(a+b+c)}{(a+b+c)^2}}$$

$$X = \sqrt{\frac{bc(-a+b+c)}{(a+b+c)}}$$

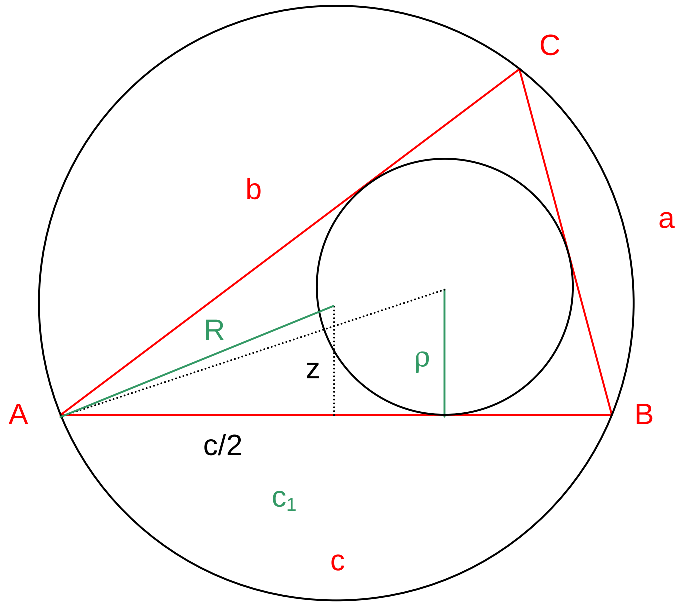
$$X = \sqrt{\frac{bc(-a+b+c)}{(a+b+c)}} \qquad Y = \sqrt{\frac{ac(a-b+c)}{(a+b+c)}} \qquad Z = \sqrt{\frac{ab(a+b-c)}{(a+b+c)}}$$

Vergleicht man Inkreis- und Umkreisradius miteinander , so erhält man die sogenannte **Wehrleformel** und die **Wehrlezahl** für die Seiten a, b, c (vgl. **[2]**):

$$R = \frac{abc}{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}} \qquad \rho = \frac{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{2(a+b+c)}$$

$$\boxed{2R\rho = \frac{abc}{a+b+c}}$$

Abstand d von In- und Umkreismittelpunkt:



Das Abstandsquadrat von In- und Umkreismittelpunkt d^2 erhält man beim spitzwinkligen Dreieck, für welches $\|a^2 + b^2 - c^2\| = a^2 + b^2 - c^2$ ist, zu,

$$d^2 = \left(c1 - \frac{c}{2}\right)^2 + (\rho - z)^2$$

$$d^2 = \left(\frac{-a+b+c}{2} - \frac{c}{2}\right)^2 + (\rho - z)^2$$

$$d^2 = \left(\frac{-a+b}{2}\right)^2 + (\rho - z)^2$$

$$d^2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} + \rho^2 - 2\rho z + z^2$$

$$d^2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} + \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4(a+b+c)^2} - \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{2(a+b+c)} + R^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$d^2 = \frac{(a^2 - 2ab + b^2 - c^2)(a+b+c)^2}{4(a+b+c)^2} + \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4(a+b+c)^2} - \frac{2c(a^2+b^2-c^2)(a+b+c)}{4(a+b+c)^2} + R^2$$

$$d^2 = \frac{(a^2 - 2ab + b^2 - c^2)(a+b+c)^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 - 2c(a^2+b^2-c^2)(a+b+c)}{4(a+b+c)^2} + R^2$$

$$d^2 = \frac{-4a^2bc - 4ab^2c - 4abc^2}{4(a+b+c)^2} + R^2$$

$$d^2 = \frac{-4abc(a+b+c)}{4(a+b+c)^2} + R^2$$

$$d^2 = \frac{-abc}{(a+b+c)} + R^2$$

$$d^2 = -2R\rho + R^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} d^2 &= R^2 - 2R\rho \\ d &= \sqrt{R^2 - 2R\rho} \end{aligned}}$$

, wobei zur Umformung folgende Formeln benutzt wurden:

$$c_1 = \frac{-a+b+c}{2}$$

$$\rho = \frac{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{2(a+b+c)}$$

$$z = \frac{c\|a^2+b^2-c^2\|}{2\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}} = \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{2\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}$$

$$z = R^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \qquad 2R\rho = \frac{abc}{a+b+c}$$

---- + ----

(+)

Die **Fehringerschen Gleichungen** des allgemeinen Dreiecks lauten:

$$p = (a^2 + c^2 - b^2)/2c$$

$$q = (b^2 + c^2 - a^2)/2c$$

$$h = \mathrm{sqrt}(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) / 2c$$

$$h = \mathrm{sqrt}((a^2 + b^2 - c^2)/2 + pq)$$

Hierin bedeuten: a,b,c :Dreieckseiten; h: Höhe auf c ; p,q: durch h erzeugte Zerlegung von c

Referenzen bzw. unveröffentlichte Manuskripte:

[1] Fehringer, Arno : Erweiterung der Euklidischen Flächensätze auf das allgemeine Dreieck und die Fehringerschen Gleichungen nebst Anwendung zur Volumenbestimmung des allgemeinen Tetraeders, Juni 2007

[2] Wehrle, Hugo: Dreieck und Wehrlezahl, Sommer 2007