Um- und Inkugelradien am allgemeinen Tetraeder

Oktober 2007

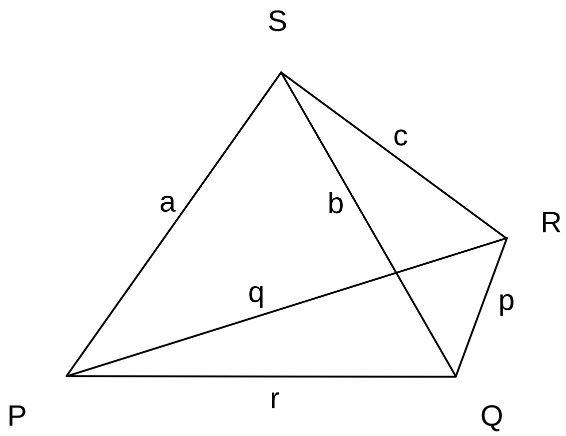
In der vorliegenden Arbeit sollen Um- und Inkugelradien eines allgemeinen Tetraeders in Abhängigkeit von den Kantenlängen dargestellt werden. Hierzu muss ich mich zum Teil auf Ergebnisse früherer, von mir verfasster Arbeiten stützen. In **[1]** wurde die Volumenformel des Tetraeders hergeleitet, welche folgendermaßen lautet:

$$V = 1/12\ \text{sqrt}\,[\ a^2b^2(p^2+q^2-r^2)+ a^2c^2(p^2-q^2+r^2)+ b^2c^2(-p^2+q^2+r^2)+ a^2p^2(q^2+r^2)+ b^2q^2(p^2+r^2)+ c^2r^2(p^2+q^2)$$
$$-a^2p^2(a^2+p^2)- b^2q^2(b^2+q^2)-c^2r^2(c^2+r^2)-p^2q^2r^2\ ]$$

Dabei bedeuten a, b, c, p, q, r die Kantenlängen, wobei a und p, b und q, c und r jeweils gegenüberstehen. Hieraus erhält man eine Formel für die Höhe des Tetraeders bezüglich des Grunddreiecks Δpqr mit dem Flächeninhalt $A = 1/4\ \text{sqrt}(\ 2p^2q^2 +2p^2r^2 +2q^2r^2-p^4-q^4-r^4)$ gemäß:

$h = 3V/A$

$$h= \text{sqrt}\,[\ a^2b^2(p^2+q^2-r^2)+ a^2c^2(p^2-q^2+r^2)+ b^2c^2(-p^2+q^2+r^2)+ a^2p^2(q^2+r^2)+ b^2q^2(p^2+r^2)+ c^2r^2(p^2+q^2)$$
$$-a^2p^2(a^2+p^2)- b^2q^2(b^2+q^2)- c^2r^2(c^2+r^2)-p^2q^2r^2\ ]\ /\ \ \text{sqrt}\,(2p^2q^2 +2p^2r^2 +2q^2r^2-p^4-q^4-r^4)$$



Die 4 Dreiecke und die entsprechenden Flächeninhalte werden folgendermaßen bezeichnet:

$\Delta_1 = \Delta abr$, $A_1 =1/4\ \text{sqrt}\,(2a^2b^2 +2a^2r^2 +2b^2r^2-a^4-b^4-r^4)$

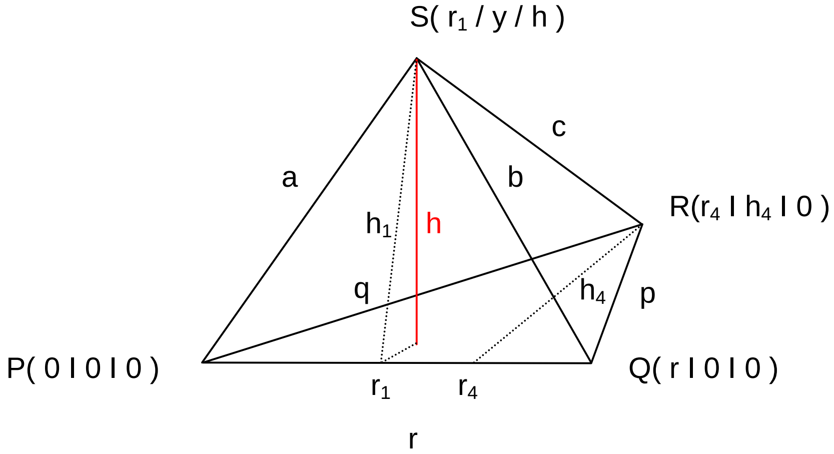
$\Delta_2 = \Delta bcp$, $A_2 =1/4\ \text{sqrt}\,(2b^2c^2 +2b^2p^2 +2c^2p^2-b^4-c^4-p^4)$

$\Delta_3 = \Delta caq$, $A_3 =1/4\ \text{sqrt}\,(2c^2a^2 +2c^2q^2 +2a^2q^2-c^4-a^4-q^4)$

$\Delta_4 = \Delta pqr$, $A_4 = 1/4\ \text{sqrt}\,(2p^2q^2 +2p^2r^2 +2q^2r^2-p^4-q^4-r^4)$

Desweiteren denkt man sich durch die Ecke P ein Cartesisches Koordinatensystem, so dass r auf der x-Achse und Δ_4 in der x-y-Ebene liegt.

Bild:



Bestimmung der Koordinaten :

P(0 I 0 I 0)

Q(r I 0 I 0)

R(r_4 I h_4 I 0) mit $r_4 = (q^2+r^2-p^2)/(2r)$, $h_4 = \text{sqrt}\,(2p^2q^2 +2p^2r^2 +2q^2r^2-p^4-q^4-r^4) / (2r)$

S(r_1 I y I h) mit

$r_1 = (a^2+r^2-b^2) / (2 r)$

$h = \text{sqrt}\,[\, a^2b^2(p^2+q^2-r^2)+ a^2c^2(p^2-q^2+r^2)+ b^2c^2(-p^2+q^2+r^2)+ a^2p^2(q^2+r^2)+ b^2q^2(p^2+r^2)+ c^2r^2(p^2+q^2)$
$-a^2p^2(a^2+p^2)- b^2q^2(b^2+q^2)- c^2r^2(c^2+r^2)-p^2q^2r^2 \,] \;/\; \text{sqrt}\,(2p^2q^2 +2p^2r^2 +2q^2r^2-p^4-q^4-r^4)$

wobei y noch zu bestimmen ist.

Die Längen r_4 , h_4 , r_1 erhält man aus den **Fehringerschen Gleichungen [1]** für das allgemeine Dreieck.

Bestimmung von y :

(1) $h^2 = h_1^2-y^2$

(2) $(r_1-r_4)^2 + (y-h_4)^2 + h^2 = c^2$ (Abstandsquadrat IRSI^2)

$(r_1-r_4)^2 + y^2 -2yh_4 + h_4^2 + h^2 = c^2$

$(r_1-r_4)^2 + y^2 -2yh_4 + h_4^2 + h_1^2-y^2 = c^2$

$$(r_1-r_4)^2 -2yh_4 + h_4^2 + h_1^2 = c^2$$

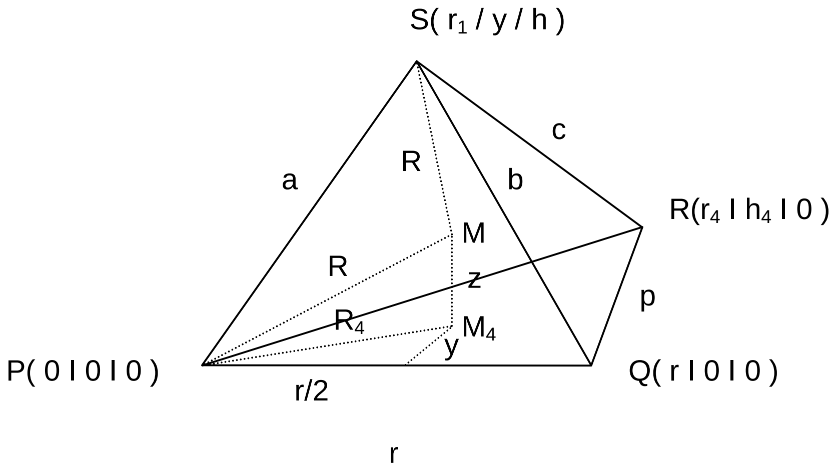
$$y = ((r_1-r_4)^2 + h_4^2 + h_1^2) / (2yh_4)$$

Einsetzen der Terme und Vereinfachen liefert für y folgenden Ausdruck:

$$y= (-r^4+a^2p^2-a^2q^2+a^2r^2-b^2p^2+b^2q^2+b^2r^2-2c^2r^2+p^2r^2+q^2r^2) / (2r \ sqrt(2p^2q^2 +2p^2r^2 +2q^2r^2-p^4-q^4-r^4))$$

<u>Berechnung von z und Umkugelradius R :</u>

In **[2]** wurde gezeigt, dass der Umkreismittelpunkt M_4 und Umkreisradius R_4 des Dreiecks Δ_4 gegeben sind durch:



$M_4(r/2 \; I \; z_4 \; I \; 0)$ mit $z_4 = r(p^2+q^2-r^2) / (2 \ sqrt (2p^2q^2 +2p^2r^2 +2q^2r^2-p^4-q^4-r^4))$

$$R_4 = pqr / (2 \ sqrt (2p^2q^2 +2p^2r^2 +2q^2r^2-p^4-q^4-r^4))$$

Der Umkugelmittelpunkt M liegt senkrecht über M_4 und hat die Koordinaten

$M(r/2 \; I \; z_4 \; I \; z)$, **wobei z noch zu bestimmen ist**.

Zur Bestimmung von z und R dienen folgende Gleichungen:

(3) $R^2 = R_4^2 + z^2$ (Abstandsquadrat $IPMI^2$)

(4) $(r_1-r/2)^2 + (y-z_4)^2 + (h-z)^2 = R^2$ (Abstandsquadrat $IMSI^2$)

Durch Einsetzen und Umformen erhält man aus (4) eine Gleichung für z :

$(r_1-r/2)^2 + (y-z_4)^2 + h^2 - 2hz + z^2 = R^2$

$(r_1-r/2)^2 + (y-z_4)^2 + h^2 - 2hz + R^2 - R_4^2 = R^2$

$(r_1-r/2)^2 + (y-z_4)^2 + h^2 - 2hz - R_4^2 = 0$

$z = ((r_1-r/2)^2 + (y-z_4)^2 + h^2 - R_4^2) / (2h)$

Weiteres Einsetzen ergibt :

$$z = (-a^2p^4-b^2q^4-c^2r^4+a^2p^2q^2+a^2p^2r^2+b^2p^2q^2+b^2q^2r^2+c^2p^2r^2+c^2q^2r^2-2p^2q^2r^2) / (2\ \mathrm{sqrt}\ [a^2b^2(p^2+q^2-r^2)+ a^2c^2(p^2-q^2+r^2)+ b^2c^2(-p^2+q^2+r^2)+ a^2p^2(q^2+r^2)+ b^2q^2(p^2+r^2)+ c^2r^2(p^2+q^2) -a^2p^2(a^2+p^2)- b^2q^2(b^2+q^2)- c^2r^2(c^2+r^2)-p^2q^2r^2]\ \ \mathrm{sqrt}\ (2p^2q^2 +2p^2r^2 +2q^2r^2-p^4-q^4-r^4))$$

Aus (1) erhält man dann eine Gleichung für R^2 folgenden Quotienten:

$$R^2 =((-a^2p^4-b^2q^4-c^2r^4+a^2p^2q^2+a^2p^2r^2+b^2p^2q^2+b^2q^2r^2+c^2p^2r^2+c^2q^2r^2-2p^2q^2r^2)^2 + 4p^2q^2r^2\ [a^2b^2(p^2+q^2-r^2)+ a^2c^2(p^2-q^2+r^2)+b^2c^2(-p^2+q^2+r^2)+a^2p^2(q^2+r^2)+b^2q^2(p^2+r^2)+c^2r^2(p^2+q^2)-a^2p^2(a^2+p^2)-b^2q^2(b^2+q^2)- c^2r^2(c^2+r^2)-p^2q^2r^2]\ ) / (4[a^2b^2(p^2+q^2-r^2)+a^2c^2(p^2-q^2+r^2)+b^2c^2(-p^2+q^2+r^2)+a^2p^2(q^2+r^2)+b^2q^2(p^2+r^2)+c^2r^2(p^2+q^2)-a^2p^2(a^2+p^2)- b^2q^2(b^2+q^2)-c^2r^2(c^2+r^2)-p^2q^2r^2]\ (2p^2q^2 +2p^2r^2 +2q^2r^2-p^4-q^4-r^4))$$

Nach Quadrieren, Ausmultiplizieren und Zusammenfassen erhält man für den Zähler von R^2 eine Summe mit 36 Summanden in Produktform , die man wie folgt faktorisieren kann:

$$R^2 =(2a^2b^2p^2q^2+2a^2c^2p^2r^2+2b^2c^2q^2r^2-a^4p^4-b^4q^4-c^4r^4)(2p^2q^2 +2p^2r^2 +2q^2r^2-p^4-q^4-r^4) / (4[a^2b^2(p^2+q^2-r^2)+a^2c^2(p^2-q^2+r^2)+b^2c^2(-p^2+q^2+r^2)+a^2p^2(q^2+r^2)+b^2q^2(p^2+r^2)+c^2r^2(p^2+q^2)-a^2p^2(a^2+p^2)- b^2q^2(b^2+q^2)-c^2r^2(c^2+r^2)-p^2q^2r^2]\ (2p^2q^2 +2p^2r^2 +2q^2r^2-p^4-q^4-r^4))$$

Kürzen durch $(2p^2q^2 +2p^2r^2 +2q^2r^2-p^4-q^4-r^4)$ ergibt:

$$R^2 =(2a^2b^2p^2q^2+2a^2c^2p^2r^2+2b^2c^2q^2r^2-a^4p^4-b^4q^4-c^4r^4) / (4[a^2b^2(p^2+q^2-r^2)+a^2c^2(p^2-q^2+r^2)+b^2c^2(-p^2+q^2+r^2)+a^2p^2(q^2+r^2)+b^2q^2(p^2+r^2)+c^2r^2(p^2+q^2)-a^2p^2(a^2+p^2)- b^2q^2(b^2+q^2)-c^2r^2(c^2+r^2)-p^2q^2r^2])$$

$$R =\mathrm{sqrt}(2a^2b^2p^2q^2+2a^2c^2p^2r^2+2b^2c^2q^2r^2-a^4p^4-b^4q^4-c^4r^4) / (2\mathrm{sqrt}[a^2b^2(p^2+q^2-r^2)+a^2c^2(p^2-q^2+r^2)+b^2c^2(-p^2+q^2+r^2)+a^2p^2(q^2+r^2)+b^2q^2(p^2+r^2)+c^2r^2(p^2+q^2)- a^2p^2(a^2+p^2)-b^2q^2(b^2+q^2)-c^2r^2(c^2+r^2)-p^2q^2r^2])$$

Der Nenner ist gleich 24V, also folgt:

$R = \mathrm{sqrt}(\ 2a^2b^2p^2q^2+2a^2c^2p^2r^2+2b^2c^2q^2r^2-a^4p^4-b^4q^4-c^4r^4\ )\ /\ (24V)$

Den Zähler kann man nochmals Faktoriesieren:

$$R = \mathrm{sqrt}\ (\ (\ +ap+bq+cr\ )\ (\ -ap+bq+cr\ )\ (\ +ap-bq+cr\ )\ (\ +ap+bq-cr\ )\ )\ /\ (24V)$$

Zusammenhang zwischen Umkugelradius R und Inkugelradius ρ :

Wegen $\rho = 3V\ /\ (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$ folgt:

$$8R\rho = \mathrm{sqrt}\ (\ (\ +ap+bq+cr\ )\ (\ -ap+bq+cr\ )\ (\ +ap-bq+cr\ )\ (\ +ap+bq-cr\ )\ )\ /\ (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$$

----+ ----

Referenzen:

[1] **Arno Fehringer**: Verallgemeinerung der euklidischen Flächensätze im allgemeinen Dreieck und Fehringersche Gleichungen nebst Anwendung zur Volumenbestimmung des allgemeinen Tetraeders , Juni 2007

[2] **Arno Fehringer**: Um- und Inkreisradien am allgemeinen Dreieck, September 2007

[3] **Wehrle, Hugo**: Dreieck und Wehrlezahl, Sommer 2007