

Die Axiome der Geometrie

1. Axiom: Inzidenzaxiom. Es gibt Punkte und Geraden; jede Gerade ist eine Teilmenge der Punktmenge. Durch je zwei verschiedene Punkte P und Q gibt es genau eine Gerade; diese Gerade bezeichnen wir mit PQ . Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

2. Axiom: Linealaxiom. Je zwei Punkten P, Q ist ihr Abstand $|PQ|$ zugeordnet; $|PQ|$ ist eine reelle Zahl mit folgenden Eigenschaften:

a) $|PQ| \geq 0$, $|PQ| = 0$ genau dann, wenn $P = Q$;

b) $|PQ| = |QP|$;

c) $|PQ| \leq |PR| + |RQ|$; Dies ist die sogenannte Dreiecksungleichung.

Wir fordern weiterhin, dass jede nichtnegative reelle Zahl auch als Abstand vorkommen kann

Definition: Gegeben sind drei verschiedene Punkte P, R, Q auf einer Geraden. Wir sagen, R liegt dann **zwischen** P und Q , wenn gilt: $|PQ| = |PR| + |RQ|$. Wir schreiben dann P - R - Q .

Definition: Seien A und B zwei verschiedene Punkte.

Dann besteht die **Strecke** $[AB]$ aus den Punkten A und B und allen Punkten der Geraden AB , die *zwischen* A und B liegen.

Unter einem **Strahl** $[AB$ verstehen wir die Punkte A und B , sowie alle Punkte X zwischen A und B und alle Punkte Y für die gilt, dass B zwischen A und Y liegt.

Definition: Seien A, B, C drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, dann bezeichnen wir mit **Dreieck** ABC oder ΔABC die Punktmenge mit den **Ecken** A, B, C und den **Seiten** $[AB], [BC], [CA]$. $\Delta ABC = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$. Die Seiten eines Dreiecks sind also Strecken und keine Geraden.

3. Axiom: Axiom von Pasch. (Moritz Pasch, 1843 - 1930). Sei ΔABC ein Dreieck, und sei g eine Gerade, die keine Ecke des Dreiecks enthält. Dann gilt: Wenn g eine Seite des Dreiecks ΔABC trifft, dann trifft g genau eine weitere Seite von ΔABC .

Definition:

Seien A, B zwei Punkte der Ebene, g eine Gerade der Ebene mit $A \notin g$ und $B \notin g$. A und B liegen **auf derselben Seite von** g , wenn $[AB] \cap g = \{ \}$.

Unter einer offenen Halbebene $H(g, A \notin g)$ verstehen wir die Menge aller Punkte der Ebene, die mit A auf derselben Seite von g liegen.

Definition: Seien R, S und T drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Dann ist der **Winkel** $\angle RST$ die Vereinigung der Strahlen $[SR$ und $[ST$, das heißt:

$$\angle RST = [SR \cup [ST.$$

Man nennt S den **Scheitel** und [SR und [ST die **Schenkel** des Winkels $\angle RST$. Wenn wir die Ebene noch orientieren, d. h. einen Umlaufsinn dreier Punkte festlegen, die nicht auf einer Geraden liegen, dann können wir auch von einem orientierten Winkel sprechen und zwischen $\angle RST$ und $\angle TSR$ unterscheiden.

In einem Dreieck $\triangle ABC$ können wir die Winkel übersichtlich und kurz bezeichnen: Winkel eines Dreiecks, $\angle A$ ist der Winkel $\angle BAC$, $\angle B = \angle ABC$, $\angle C = \angle BCA$. Man nennt $\angle A$ den „Winkel bei A“ und spricht von den Winkeln $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ des Dreiecks $\triangle ABC$.

4. Axiom: Geodreieckaxiom. Jedem Winkel $\angle RST$ wird ein Winkelmaß $|\angle RST|$ zugeordnet. Dies ist eine reelle Zahl x mit $0 < x < 180$. Diese Zuordnung hat die folgenden beiden Eigenschaften:

(1) Seien g eine Gerade, R und S zwei Punkte auf g , und H eine der beiden Halbebene $H(P, g)$, $p \notin g$. α sei eine reelle Zahl zwischen 0 und 180. Dann gibt es einen Punkt T in $H(P, g)$ so dass der Winkel $\angle RST$ genau das Maß α hat.

(2) Sei U ein Punkt im Innern des Winkels $\angle RST$. Dann ist

$$|\angle RST| = |\angle TSU| + |\angle USR|.$$

Definition: Wir nennen zwei Strecken **kongruent**, wenn sie gleich lang sind; zwei Winkel heißen **kongruent**, wenn sie das gleiche Maß haben. Zum Beispiel sind alle Winkel vom Maß 30° kongruent.

Definition. Seien $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ Dreiecke. Wir sagen, dass $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ **kongruent** sind (und schreiben dafür $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$), falls folgende Aussagen gelten:

$$|AB| = |A'B'|, |BC| = |B'C'|, |CA| = |C'A'|$$

und

$$|\angle A| = |\angle A'|, |\angle B| = |\angle B'|, |\angle C| = |\angle C'|.$$

5. Axiom: Kongruenzaxiom. Es gilt der Kongruenzsatz SWS.

6. Axiom: Parallelenaxiom. Zu jedem Punkt P und jeder Geraden g mit $P \notin g$ gibt es genau eine Gerade h durch P , die keinen Punkt mit g gemeinsam hat („parallel“ zu g ist).

7. Axiom: Kongruente Flächen haben den gleichen Flächeninhalt:

a) $F_1 \cong F_2 \Rightarrow |F_1| = |F_2|$

b) Ist eine Fläche in n Teilflächen F_1, F_2, \dots, F_n zerlegt, so gilt:

$$|F| = |F_1| + |F_2| + \dots + |F_n|$$

Ein Rechteck mit den Seitenlängen $a, b \in \mathbf{R}$ hat den Flächeninhalt $a \cdot b$. Insbesondere hat dann ein Quadrat der Seitenlänge a den Flächeninhalt a^2 .

Auszug aus: **Wiegand:** Geometrie als Wissenschaft und Kultur, Vorlesungsskript

